Das räumliche Analogon eines Steiner'schen Problems der Ebene.

Inaugural-Dissertation

welche mit Genehmigung der

Philosophischen Facultät der Universität Breslau

zur Erlangung der Doctorwürde

Montag den 6. August 1877

Mittags 12 Uhr

in der Aula Leopoldina

gegen die Herren Opponenten:

A. Bochert, Dr. philos., und **P. Baumert,** cand. math.

öffentlich vertheidigen wird

der Verfasser

Otto Handel.

ACAD. LUGD. BAT. BIBL.

Breslau, 1877.

Breslauer Genossenschafts-Buchdruckerei, E. G., Ursulinerstrasse 1.

Seinem hochverehrten Lehrer

Herrn Professor Dr. H. Schröter

in innigster Verehrung und Dankbarkeit

gewidmet

vom Verfasser.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41543119_0086

Einleitung.

Im 53. Bande von Crelle's Journal für Mathematik hat Steiner zahlreiche, interessante Theoreme über eine von ihm entdeckte, besondere Curve dritter Klasse und vierter Ordnung veröffentlicht. Diese Mittheilungen sind Veranlassung zu einer Anzahl trefflicher Arbeiten geworden, in denen die Autoren theils die unbewiesenen Resultate des grossen Geometers begründen, theils neue Eigenschaften und Erzeugungsweisen aufstellen und mit den bereits bekannten in Beziehung setzen. In erster Linie sind zu nennen die Schröter'sche Erzeugungsweise[1]) und die von Cremona[2]) gegebene Herleitung der Eigenschaften der Steiner'schen Hypocycloide aus der allgemeinen Theorie der Curven dritter Ordnung. Die erste Bemerkung für eine analytische Behandlung des Problems rührt von Clebsch[3]) her. Ausserdem haben sich mit der Aufgabe beschäftigt: Guessfeldt[4]), Eckhardt[5]), Kiepert[6]), Siebeck[7]), Frahm[8]), Milinowski[9]).

Der Zweck der vorliegenden Arbeit ist die Uebertragung des Steiner'schen Problems auf den Raum; ihren Gegenstand

---

[1]) Schröter, Erzeugnisse krummer projectivischer Gebilde. Crelle's Journal Bd. 54, p. 31.

[2]) Cremona, Sur l'hypocycloide à trois rebrouss. ibid. Bd. 64, p. 101.

[3]) ibid. 64, p. 124.

[4]) Guessfeldt, de curva plana tertiae class. Bonnae 1865.

[5]) Zeitschrift für Math. XV. p. 129 und XVIII. p. 329.

[6]) ibid. XVII. p. 129.

[7]) Crelle's Journ. Bd. 66, p. 334.

[8]) Zeitschrift f. M. XVIII. p. 363.

[9]) ibid. XIX. p. 115.

bilden daher im Wesentlichen folgende Fragen. Welchen Ort beschreibt ein Punkt von solcher Beschaffenheit, dass die von ihm auf die Flächen eines gegebenen Tetraeders gefällten Perpendikel ihre Fusspunkte in einer Ebene haben, und welchen Ort umhüllt diese Ebene? Nach kurzen Bemerkungen über die projectivische Fassung der Frage und ihre Verallgemeinerung wird der Punktort Gegenstand einer längeren Betrachtung sein; eine Abbildung desselben auf der Ebene, sowie eine Reihe besonderer Eigenschaften und Erzeugungsweisen werden den Hauptinhalt dieses Abschnittes ausmachen. Ein weiterer Abschnitt wird dem Ebenenort und dem Zusammenhang gewidmet sein, in welchem beide Orte stehen.

Der Punktort führt auf eine besondere Fläche dritter Ordnung mit 4 Doppelpunkten. Die Untersuchungen über solche Flächen sind, wie überhaupt die Theorie der Flächen 3. Ordnung noch in ihrer Entstehung begriffen ist, neusten Datums. Eine Haupteigenschaft, die Existenz von 3 in einer Ebene liegenden Geraden, welche Cayley [1]) verdankt wird, fällt schon ins Jahr 1844. Den Nachweis von 28 merkwürdigen Punkten der Fläche hat Beltrami [2]) zuerst geliefert. Von anderen Arbeiten, die mit der vorliegenden in Beziehung stehen, nenne ich noch eine von Eckhardt [3]) und eine von Geiser [4]); früheren Ursprungs, aber geringer an Werth sind einige kleinere, durch eine Aufgabe Beltrami's angeregte Abhandlungen [5]).

---

[1]) Cayley, Journal de math. de Liouville. série 1. tome IX.

[2]) Beltrami, Estensione allo spazio di tre dimensioni etc. Giornale di Matematiche vol. I. p. 208 e 354.

[3]) Eckhardt, Beiträge z. analyt. Geom. Math. Annalen Bd. V. p. 30.

[4]) Geiser, Zur Theorie der Flächen 2. und 3. Grades. Crelle's J. Bd. 39, p. 197.

[5]) Nouvelles Annales de math. série 2. tome II. p. 336; III, 225 et 367; IV, 66; V, 317.

I.

Projectivische Fassung der Frage und ihre Verallgemeinerung.

1. Für das Verständniss wird eine Angabe der Bezeichnungsweise, die im Folgenden festgehalten werden soll, von Nutzen sein. Punkte werden durch kleine deutsche oder griechische, Gerade durch kleine lateinische, Ebenen durch grosse lateinische oder griechische Buchstaben bezeichnet. Punktreihen, Strahlbüschel etc. deute ich in üblicher Weise symbolisch durch den Träger resp. Grundpunkt etc. mit dem in Klammern beigefügten variabeln Element an.

Die Ecken des Tetraeders T_a seien a_1, a_2, a_3, a_4; die gegenüberliegenden Flächen A_1, A_2, A_3, A_4; die Kanten $a_{12}, a_{13} \ldots\ldots a_{34}$ derart, dass $a_{\varkappa\lambda} = a_\varkappa a_\lambda = (A_\mu, A_\nu)$ ist, wobei $\varkappa, \lambda, \mu, \nu$ von einander verschieden sind. Zwei Gegenkanten würden demnach durch $a_{\varkappa\lambda}$ und $a_{\mu\nu}$ zu bezeichnen sein. Die Höhen des Tetraeders seien $h_\varkappa$ ($\varkappa = 1, 2, 3, 4$), so zwar, dass $h_\varkappa$ aus $a_\varkappa$ auf $A_\varkappa$ senkrecht gefällt ist. Der unendlich ferne Punkt von $h_\varkappa$ sei $a_\varkappa^\infty$.

2. Der Umstand, dass alle Normalen einer Tetraederfläche $A_\varkappa$ den Punkt $a_\varkappa^\infty$ enthalten, berechtigt zu folgender Fassung der Frage. Welchen Ort beschreibt ein Punkt π, welcher der Bedingung genügt, dass die Verbindungslinien $\pi a_\varkappa^\infty$ die Flächen $A_\varkappa$ in 4 Punkten einer Ebene Π treffen?

In dieser Fassung gewinnt die Frage einen neuen Gesichtspunkt und ist einer Verallgemeinerung fähig, indem an Stelle der Punkte $a_\varkappa^\infty$ vier beliebige Punkte $\alpha_\varkappa$ genommen werden. Ich gehe in Kürze auf diese allgemeine Aufgabe ein, doch liegt eine erschöpfende Behandlung nicht in meiner Absicht.

3. Es sei l eine beliebige Gerade, $\mathfrak{x}$ ein Punkt auf ihr, $\mathfrak{x}_\varkappa$ der Schnittpunkt von $\mathfrak{x}\alpha_\varkappa$ mit $A_\varkappa$ und $l_\varkappa$ die Schnittlinie von $A_\varkappa$ mit der Ebene $(l\alpha_\varkappa)$. Bewegt sich $\mathfrak{x}$ auf l, so ent-

stehen die 4 projectivischen Punktreihen $l_\varkappa(\mathfrak{x}_\varkappa)$, und es kommt darauf an, nachzusehen, wie oft 4 entsprechende Punkte in einer Ebene liegen. Nun erzeugt l_1 mit den 3 andern Punktreihen l_λ drei Regelflächen $R^{3}_{1\lambda}$ $(\lambda = 2, 3, 4)$, welche die Erzeugende l_1 gemein haben, also noch 4 nicht durch l_1 gehende Tangentialebenen[1]); jede solche ist aber eine Ebene der gesuchten Art, folglich ist der Ort von π eine Fläche 4. Ordnung F^4.

4. Es hat keine Schwierigkeit, einige besondere Geraden und Punkte von F^4 anzugeben. Durch elementare Betrachtungen gewinnt man die Ueberzeugung, dass die Kanten auf F^4 liegen, die Ecken also Doppelpunkte der Fläche sind. Ebenso leicht wird erkannt, dass den Punkten der Geraden $(A_\varkappa, A'_\varkappa)$, wobei $A'_\varkappa = \alpha_\lambda \alpha_\mu \alpha_\nu$ ist, die verlangte Eigenschaft zukommt. Dasselbe gilt von den 4 Punkten $\alpha_\varkappa$ und 4 andern Punkten $\alpha'_\varkappa$, wenn durch $\alpha'_\varkappa$ der Schnittpunkt der 3 Ebenen bezeichnet wird, welche die Kanten $a_{\lambda\mu}$, $a_{\lambda\nu}$, $a_{\mu\nu}$ resp. mit α_ν, α_μ, α_λ verbinden.

Es lässt sich auch unschwer darthun, dass die Ecken $a_\varkappa$ die einzigen Doppelpunkte von F^4 sind, sodass die Klasse der Fläche, die im Allgemeinen 36 ist, durch jeden Doppelpunkt aber um 2 vermindert wird, sich auf 28 reducirt.

Der Schnitt jeder Ebene $A'_\varkappa$ zerfällt in die Gerade $(A_\varkappa, A'_\varkappa)$ und eine Curve dritter Ordnung $C^3_\varkappa$, welche eine bemerkenswerthe Eigenschaft besitzt. Ist $\mathfrak{x}$ ein Punkt der Curve C^3_1, so schneiden die Geraden $\mathfrak{x}\alpha_\lambda$ $(\lambda = 2, 3, 4)$ resp. die Flächen A_λ $(\lambda = 2, 3, 4)$ in 3 Punkten der Ebene A'_1, während A'_1 den Punkt $(\mathfrak{x}\alpha_1, A_1)$ im Allgemeinen nicht enthält. Da nun die 4 Punkte $(\mathfrak{x}\alpha_\varkappa, A_\varkappa)$ in einer Ebene liegen müssen, so liegen die 3 Punkte $(\mathfrak{x}\alpha_\lambda, A_\lambda)$ $(\lambda = 2, 3, 4)$ in einer Geraden.

5. Das Hauptresultat lässt sich in die Worte fassen:

»Der Ort eines Punktes π, dessen Verbindungslinien mit $\alpha_\varkappa$ die Ebenen $A_\varkappa$ in 4 Punkten einer Ebene Π treffen,

[1]) Der reciproke Satz ist von Chasles ausgesprochen worden. Journal de Liouville, année 1857, p. 397.

ist eine Fläche 4. Ordnung und 28. Klasse mit 4 Doppelpunkten.«

Ganz analoge Betrachtungen ergeben:

»Die Enveloppe der Ebene Π ist eine Fläche 4. Klasse und 28. Ordnung; sie besitzt die Ebenen $A'_\varkappa$ zu Doppeltangentialebenen und berührt die Ebenen $A_\varkappa$ einfach; es lassen sich leicht einige Geraden nachweisen, nämlich die 6 Geraden $\alpha_\varkappa\alpha_\lambda$ und die 4 Geraden $a_\varkappa\alpha_\varkappa$.«

6. Tritt der bis jetzt ausgeschlossene Fall ein, dass die 4 Punkte $\alpha_\varkappa$ in einer Ebene E liegen, so erleiden unsere Sätze folgende Modificationen:

»Der Punktort zerfällt in die Ebene E und eine Fläche 3. Ordnung mit 4 Doppelpunkten; der Ebenenort ist eine Fläche 4. Klasse, welche die Ebene E zur dreifachen Tangentialebene hat.«

Den directen Beweis hierfür unterdrücke ich, zumal er sich in nichts von dem unterscheidet, der für einen besonderen Fall später zu führen ist. Dieser Fall ist der, bei welchem die Ebene E die unendlich entfernte ist und die weitere Beschränkung eintritt, dass die Punkte $\alpha_\varkappa$ identificirt werden mit den Punkten $a_\varkappa^\infty$. Dies ist die ursprüngliche Frage, welcher ich nunmehr näher trete.

II.

§ 1. Ordnung und Singularitäten des Punktorts.

7. Es handelt sich um den Ort eines Punktes π von der Eigenschaft, dass die 4 Fusspunkte der von π auf $A_\varkappa$ gefällten Perpendikel in einer Ebene Π liegen.

Es sei l eine beliebige Gerade, $\mathfrak{x}$ ein variabler Punkt auf ihr, $\mathfrak{x}_\varkappa$ die Projection von $\mathfrak{x}$ und $l_\varkappa$ die von l auf $A_\varkappa$; dann beschreiben die Punkte $\mathfrak{x}_\varkappa$ vier projectivisch-ähnliche Punktreihen $l_\varkappa(\mathfrak{x}_\varkappa)$. Die unendlich ferne Ebene E_∞ verbindet demnach 4 entsprechende Punkte, folglich ist der ihr entsprechende Punkt auf l d. i. der unendlich ferne Punkt

von l ein Punkt des gesuchten Orts d. h. E_∞ bildet einen Theil desselben.

Um zu finden, wieviel Punkte l sonst noch mit dem Orte gemein hat, hilft die Bemerkung, dass l_1, l_2, l_3 einer- und l_4, l_2, l_3 andrerseits Raumcurven 3. Ordnung erzeugen, von denen die Ebenen $\mathfrak{x}_1 \mathfrak{x}_2 \mathfrak{x}_3 = X_1$ und $\mathfrak{x}_4 \mathfrak{x}_2 \mathfrak{x}_3 = X_4$ entsprechende Schmiegungsebenen sind, und welche beide die unendlich ferne Ebene osculiren. Nach einem bekannten Satze umhüllen nun die Geraden (X_1, E_∞) und (X_4, E_∞) zwei Kegelschnitte, welche beide die Verbindungslinie der unendlich fernen Punkte von l_2 und l_3 tangiren, also noch eine oder drei gemeinsame Tangenten haben, denen ebensoviel Punkte des Ortes auf l entsprechen.

Der Beweis für dieses Ergebniss wird auch so erbracht. l_1 erzeugt mit l_2, l_3 und l_4 drei Paraboloide $P^2_{1\lambda}$ $(\lambda = 2, 3, 4)$. Es sei $g^\infty_\lambda, h^\infty_\lambda$ das Geradenpaar von $P^2_{1\lambda}$ auf E_∞, und h^∞_λ gehöre zu derselben Schaar, wie l_1 und l_λ. Die Gerade $\mathfrak{x}_1 \mathfrak{x}_\lambda$ ist eine Erzeugende der andern Schaar von $P^2_{1\lambda}$, schneidet also l_1 und h_λ in projectivischen Punktreihen, folglich sind die 3 Punktreihen h_λ unter sich projectivisch. Es erzeugen daher h_2, h_3 und h_2, h_4 zwei Kegelschnitte, welche beide h_2 berühren, also noch 3 gemeinsame Tangenten haben.

Abgesehn von E_∞ hat man daher:

»Der Ort des Punktes π ist eine Fläche F^3 dritter Ordnung.«

8. Geht insbesondere die Gerade l durch eine Ecke, etwa durch a_4, so enthalten auch l_1, l_2, l_3 diesen Punht, und die Punktreihen $l_\lambda(\mathfrak{x}_\lambda)$ $(\lambda = 1, 2, 3)$ sind perspectivisch, sodass die Ebene $\mathfrak{x}_1 \mathfrak{x}_2 \mathfrak{x}_3 = X$ ein Ebenenbüschel beschreibt, dessen Axe die Höhe h_4 schneidet; der Punkt $(X, l_4) = \mathfrak{y}$ durchläuft auf l_4 eine mit $l_4(\mathfrak{x}_4)$ projectivische Punktreihe. Die beiden Punktreihen $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{x}_4$ auf l_4 haben in (h_4, X) einen Doppelpunkt, besitzen also noch einen solchen d. h. jede Gerade l durch a_4 hat ausser a_4 nur noch einen Punkt mit F^3 gemein, woraus folgt:

»Die Ecken des Tetraeders sind Doppelpunkte von F^3.«

Hiernach hat jede Kante 4 Punkte mit F^3 gemein,

liegt also ganz auf der Fläche. Direct überzeugt man sich hiervon durch die Ueberlegung, dass für einen beliebigen Punkt einer Kante 2 Fusspunkte in ihm selbst vereinigt liegen. Also:

»Die Fläche enthält die Kanten des Tetraeders.«

Noch 4 andere Punkte von F^3 sind leicht aufzufinden. Legt man durch $a_{\varkappa\lambda}$, $a_{\varkappa\mu}$, $a_{\lambda\mu}$ Ebenen, resp. senkrecht zu A_μ, A_λ, $A_\varkappa$, so schneiden sich die 3 neuen Ebenen in einem Punkte a'_ν der Fläche F^3; denn die Fusspunkte der von a'_ν auf A_μ, A_λ, $A_\varkappa$ gefällten Perpendikel liegen in $a_{\varkappa\lambda}$, $a_{\varkappa\mu}$, $a_{\lambda\mu}$ d. h. in A_ν, wo auch der 4. Fusspunkt sich befindet.

§ 2. Abbildung der Fläche F^3 auf der Ebene. Geometrie auf der Fläche.

9. Durch die doppelte Thatsache, dass jeder Punkt π von F^3 im Allgemeinen nur eine Fusspunktsebene Π und jede Ebene Π nur eine normale Richtung p^∞ besitzt, ist jedem Punkt π ein Punkt p^∞ zugeordnet d. h. F^3 auf der unendlich fernen Ebene E_∞ abgebildet.

Wir stellen die besonderen Elemente der Abbildung fest. Für einen Doppelpunkt $a_\varkappa$ fallen die zugehörigen Fusspunkte in $h_\varkappa$, sodass jede Ebene durch $h_\varkappa$ als Fusspunktsebene gilt; das Abbild von $a_\varkappa$ ist daher die Gerade $(A_\varkappa, E_\infty) = a^\infty_\varkappa$. Die 6 Schnittpunkte $(a^\infty_\varkappa, a^\infty_\lambda) = a^\infty_{\varkappa\lambda}$ sind wegen der doppelten Darstellung der Kanten als Verbindungslinien $a_\mu a_\nu$ und als Schnittlinien $(A_\varkappa, A_\lambda)$ sowohl die unendlich fernen Punkte der Kanten $a_{\varkappa\lambda}$ als auch die Abbilder der Kanten $a_{\mu\nu}$; doch ist der Zusammenhang derart, dass $a^\infty_{\varkappa\lambda}$ der unendlich ferne Punkt von $a_{\mu\nu}$ und das Abbild von $a_{\varkappa\lambda}$ ist. Also: »Die Doppelpunkte $a_\varkappa$ von F^3 werden durch die Seiten $a^\infty_\varkappa$, die Verbindungslinien $a_{\varkappa\lambda}$ durch die Ecken $a^\infty_{\varkappa\lambda}$ des Vierseits abgebildet, in welchem E_∞ von den Tetraederflächen $A_\varkappa$ geschnitten wird.«

Die Ecken und Seiten des Vierseits sollen Hauptpunkte resp. Hauptgerade heissen.

10. Von Wichtigkeit für einen Einblick in die Geometrie auf F^3 ist die Feststellung der Abbilder der ebenen

Schnitte von F^3. Eine beliebige Ebene X schneidet F^3 in einer Curve 3. Ordnung S^3, welche die Punkte $(X, a_{\varkappa\lambda})$ enthält; folglich geht die Bildcurve S_1^3 durch die 6 Hauptpunkte. Dies gilt von den Bildcurven aller ebenen Schnitte. Da nun 3 Punkte die Ebene X bestimmen, so muss S_1^3 durch die drei entsprechenden Punkte aus dem Curvensystem auf E_∞ individualisirt d. h. durch 9 Punkte bestimmt sein. Die Ordnungszahl von S_1^3 kann daher nicht über 3 liegen; sie ist auch nicht kleiner, als 3, da die Hauptgeraden S_1^3 in 3 Punkten treffen. Also: »Die ebenen Schnitte von F^3 werden durch ein System von Curven 3. Ordnung abgebildet, welche alle durch die 6 Hauptpunkte gehen.«

Die vorige Argumentation könnte der Vorwurf des Mangels an Strenge treffen, da der Nachweis der eindeutigen Bestimmung von S_1^3 fehlt. Der Einwand ist zurückzuweisen durch den Hinweis auf die eindeutige Zuordnung, die zwischen den Punkten von F^3 und E_∞ besteht, oder durch die Bemerkung, dass für jede Curve 3. Ordnung des Systems die Hauptpunkte 3 Paar conjugirter Punkte vorstellen, die, weil abhängig, nur für 2 Paar gelten, und dass eine Curve 3. Ordnung durch 3 Paar conjugirter Punkte[1]), also auch durch 2 Paar und 3 beliebige Punkte eindeutig bestimmt ist.

11. Das Diagonaldreiseit, welches zu dem Vierseit der Hauptgeraden gehört, bildet einen ebenen Schnitt ab, der ebenfalls 3 Doppelpunkte besitzt, also in 3 Geraden zerfällt, die jede 2 Gegenkanten schneiden. Also:

»Die Fläche F^3 besitzt 3 Geraden $q_{\varkappa\lambda,\mu\nu}$, welche zwei Gegenkanten $a_{\varkappa\lambda}$, $a_{\mu\nu}$ verbinden und in einer Ebene Q liegen.«

Diese 3 besonderen Geraden, welche noch eine wichtige Rolle spielen werden, will ich kurz »Quergeraden« nennen; jede Quergerade und die beiden Kanten, die sie verbindet, sollen als einander zugehörig bezeichnet werden.

Die übrigen besonderen Curven des Systems 3. Ordnung besitzen eine leicht zu erkennende Bedeutung. Eine Haupt-

[1]) Schröter, Curven 3. Ordn. Math. Annalen Bd. V, p. 50 Auch Clebsch, Zwei Erzeug. ibid. p. 422.

gerade $a_\varkappa^\infty$ und ein durch die drei nicht auf $a_\varkappa^\infty$ gelegenen Hauptpunkte gehender Kegelschnitt bilden einen ebenen Schnitt ab, welcher in $a_\varkappa$ einen Doppelpunkt hat. Zwei Hauptgerade $a_\varkappa^\infty$, a_λ^∞ und eine durch den noch übrigen Hauptpunkt $a_{\mu\nu}^\infty$ gehende Gerade l stellen das Abbild eines Schnittes dar, welcher in die Kante $a_{\varkappa\lambda}$ und einen durch $a_\varkappa$, a_λ gehenden Kegelschnitt zerfällt. Geht l insbesondere durch $a_{\varkappa\lambda}^\infty$, so besteht die entsprechende Curve auf F^3 aus der doppelt zu zählenden Kante $a_{\varkappa\lambda}$ und der Quergeraden $q_{\varkappa\lambda,\mu\nu}$ d. h.:

»Die 6 Ebenen $Q_{\varkappa\lambda}$, welche je eine Kante $a_{\varkappa\lambda}$ und eine Quergerade $q_{\varkappa\lambda,\mu\nu}$ enthalten, haben mit F^3 keinen weiteren Punkt gemein; $a_{\varkappa\lambda}$ zählt für den Schnitt doppelt.«

Es erübrigt noch, das entsprechende Gebilde einer Diagonale $a_{\varkappa\lambda}^\infty a_{\mu\nu}^\infty$ mit einem durch die übrigen 4 Hauptpunkte gehenden Kegelschnitt zu finden; die gesuchte Curve auf F^3 zerfällt offenbar in die Quergerade $q_{\varkappa\lambda,\mu\nu}$ und einen Kegelschnitt. Da durch das Büschel von Kegelschnitten, dessen Grundpunkte jene 4 Hauptpunkte sind, auf der Diagonale eine Punktinvolution inducirt wird mit den Doppelpunkten $a_{\varkappa\lambda}^\infty$ und $a_{\mu\nu}^\infty$, so folgt ebenso:

»Die Ebenen durch eine Quergerade $q_{\varkappa\lambda,\mu\nu}$ schneiden F^3 noch in Kegelschnitten, welche auf $q_{\varkappa\lambda,\mu\nu}$ eine Punktinvolution induciren, deren Doppelpunkte die Schnittpunkte $(q_{\varkappa\lambda,\mu\nu}, a_{\varkappa\lambda}) = q_{\varkappa\lambda}$ und $(q_{\varkappa\lambda,\mu\nu}, a_{\mu\nu}) = q_{\mu\nu}$ sind.«

Dieses Resultat involvirt das besondere:

»Jede Quergerade $q_{\varkappa\lambda,\mu\nu}$ wird von den beiden andern in 2 Punkten geschnitten, welche durch $q_{\varkappa\lambda}$ und $q_{\mu\nu}$ harmonisch getrennt werden.«

12. Die eben angestellten Betrachtungen lassen erkennen, dass die Fläche F^3 ausser den Kanten und Quergeraden keine Geraden enthält. Aus derselben Quelle können auch eine Reihe weiterer Eigenschaften abgeleitet werden, die zur Characterisirung der Fläche dienen. Ist g eine beliebige Gerade, welche mit F^3 die Punkte γ_1, γ_2, γ_3 gemein hat, deren Abbilder g_1^∞, g_2^∞, g_3^∞ seien, so werden die ebenen Schnitte durch g auf E_∞ durch ein Curvenbüschel 3. Ordnung abgebildet, dessen 9 Grundpunkte die Hauptpunkte

$a_{\varkappa\lambda}^{\infty}$ und die 3 Punkte g_1^{∞}, g_2^{∞}, g_3^{∞} sind. Die letzteren liegen mit je 3 Punkten $a_{\varkappa\lambda}^{\infty}$, $a_{\varkappa\mu}^{\infty}$, $a_{\lambda\mu}^{\infty}$ auf einem Kegelschnitt, welcher mit a_{ν}^{∞} den ebenen Schnitt durch g abbildet, welcher a_{ν} zum Doppelpunkt hat. Es giebt also in dem Curvenbüschel 4 Curven mit je 2 Doppelpunkten; da nun ein Curvenbüschel 3. Ordnung 12 Doppelpunkte besitzt[1]), so kommen in unserm Büschel noch 4 Curven mit Doppelpunkt vor, denen ebensolche ebene Schnitte entsprechen, d. h.: »Durch eine beliebige Gerade g gehen ausser den Ebenen $(g\,a_{\varkappa})$ noch 4 ebene Schnitte mit Doppelpunkt.«

Geht g durch $a_{\varkappa}$, ist γ der andere Schnittpunkt mit F^3 und g^{∞} sein Abbild, so entspricht den ebenen Schnitten durch g die Hauptgerade $a_{\varkappa}^{\infty}$ und das durch $a_{\lambda\mu}^{\infty}$, $a_{\lambda\nu}^{\infty}$, $a_{\mu\nu}^{\infty}$, g^{∞} gehende Kegelschnittbüschel. Unter den Curven des Büschels giebt es 2, welche $a_{\varkappa}^{\infty}$ berühren; ihnen entsprechen 2 ebene Schnitte, die in $a_{\varkappa}$ einen Rückkehrpunkt haben. Folglich: »Die ebenen Schnitte, die in einem Doppelpunkte $a_{\varkappa}$ von F^3 einen Rückkehrpunkt haben, umhüllen einen Kegel 2. Klasse.« Es ist leicht zu zeigen, dass dieser Kegel auch 2. Ordnung ist. Dazu ist nur nöthig zu bemerken, dass die Berührungsstrahlen die Rückkehrtangenten sind, also Strahlen, welche in $a_{\varkappa}$ mit F^3 eine dreipunktige Berührung haben; diese aber bilden einen Kegel 2. Ordnung, den sogenannten Osculationskegel, denn jeder ebene Schnitt von F^3 durch $a_{\varkappa}$ besitzt in diesem Punkte 2 Tangenten.

13. Die ebenen Schnitte verlasse ich jetzt, um mich zur Untersuchung der Curven auf F^3 zu wenden, welche durch beliebige Curven auf E_{∞} abgebildet werden. Es sei C_1^n eine allgemeine Curve n^{ter} Ordnung auf E_{∞}, welche keinen Hauptpunkt enthält, und S_1^3 das Abbild eines beliebigen ebenen Schnittes S^3; die Curven S_1^3 und C_1^n haben 3n Punkte gemein, denen ebensoviele auf F^3 entsprechen, d. h. die Ebene S^3 schneidet die gesuchte Curve in 3n Punkten, letztere ist also von der Ordnung 3n und geht n-mal durch jeden Punkt $a_{\varkappa}$, da C_1^n die Hauptgeraden in je n Punkten schneidet.

[1]) Cremona, Introduzione ad una th. delle curve piane. Nr. 88.

Also: »Eine Curve n^{ter} Ordnung auf E_∞ ist das Abbild einer Raumcurve $3n^{ter}$ Ordnung, welche in jedem Doppelpunkte der F^3 n Zweige hat.« Auch die Umkehrung ist evident[1]).

14. Für $n = 1$ folgt aus dem Vorigen:

»Die Fläche F^3 enthält doppelt unendlich viele Raumcurven 3. Ordnung, welche alle durch die Doppelpunkte von F^3 gehen.«

Wie 2 Gerade auf E_∞ sich schneiden, so thun es auch je 2 Raumcurven 3. Ordnung. Mit Rücksicht auf einen Chasles'schen Satz[2]) ergiebt sich daher:

»Je 2 Raumcurven 3. Ordnung auf F^3 haben 5 Punkte gemein und liegen daher auf demselben einschaligen Hyperboloid.«

15. Ferner wird zufolge (13) einem Kegelschnitt auf E_∞ eine Raumcurve 6. Ordnung entsprechen, die in den Punkten $a_\varkappa$ Doppelpunkte hat. Berührt der Kegelschnitt eine Hauptgerade $a_\varkappa^\infty$, so ist $a_\varkappa$ für die Raumcurve ein Rückkehrpunkt. Nun giebt es eine Schaar von Kegelschnitten, die dem Vierseit der Hauptgeraden eingeschrieben sind; folglich: »Auf F^3 liegen einfach unendlich viele Raumcurven 6. Ordnung mit 4 Rückkehrpunkten.«

Die Fälle, in denen der Kegelschnitt einen oder 2 auf einer Hauptgeraden gelegene Hauptpunkte enthält (die entsprechende Raumcurve ist 5. Ordnung resp. 4. Ordnung 1. Art)[3]), übergehe ich, um mich den interessanteren Fällen zuzuwenden, wo der Kegelschnitt $\mathfrak{K}^2$ durch ein oder 2 Paar gegenüberliegender Hauptpunkte geht. Liegen die Punkte $a_{\varkappa\lambda}^\infty$, $a_{\mu\nu}^\infty$ auf $\mathfrak{K}^2$, so geht die entsprechende Raumcurve 4. Ordnung R^4 durch die Ecken $a_\varkappa$ und schneidet jede der Kanten $a_{\varkappa\lambda}$ und $a_{\mu\nu}$ noch in einem 3. Punkte, woraus folgt, dass sie 2. Art ist. In der That lässt sich die Curve offenbar als Partialschnitt eines Hyperboloids auffassen, welches durch

[1]) Enthält C_1^n aber m Hauptpunkte, wo m höchstens 6 sein kann, so zerfällt die entsprechende Raumcurve in m Kanten und eine Raumcurve $(3n - m)^{ter}$ Ordnung.

[2]) Chasles, a. a. O.

[3]) Der Fall dreier Hauptpunkte ist in Nr. 11 erledigt.

$a_{\varkappa\lambda}$, $a_{\mu\nu}$ geht, und man übersieht sofort, dass jede Erzeugende derselben Schaar, wie $a_{\varkappa\lambda}$, $a_{\mu\nu}$, weil sie diese Kanten nicht schneidet, 3, jede der andern Schaar nur einen Punkt mit R^4 gemein hat; deshalb ist sie 2. species[1]). Daher der Satz: »Jedes Hyperboloid durch 2 Gegenkanten schneidet F^3 in einer Raumcurve 4. Ordnung 2. Art.«

Legt man durch 4 windschiefe Kanten ein Hyperboloidenbüschel, so schneidet jedes Individuum aus F^3 noch einen Kegelschnitt, welcher mit den 4 Kanten eine Curve 6. Ordnung darstellt, also durch einen 4 Hauptpunkte enthaltenden Kegelschnitt abgebildet wird und daher nach Nr. 11 durch die nicht zugehörige Quergerade geht. Also: »Das Hyperboloidenbüschel durch 4 windschiefe Kanten durchbohrt F^3 in Kegelschnitten, deren Ebenen um die nicht zugehörige Quergerade ein Büschel bilden.«

§ 3. Tangentialeigenschaften der Fläche F^3.

16. Die Untersuchungen in Nr. 11 und 12 gewinnen eine erhöhte Bedeutung durch Einführung des Kummer'schen Begriffs der Tangentialebene eines Punktes[2]), nach welchem der Schnitt einer solchen Ebene in diesem Punkte einen Doppelpunkt hat, der kein Doppelpunkt der Fläche ist. Es sind daher unmittelbar folgende Sätze evident:

»Die Fläche F^3 besitzt 3 Schaaren von Bitangentialebenen, die Ebenenbüschel um die 3 Quergeraden; die Berührungspunkte bilden auf jeder Quergeraden $q_{\varkappa\lambda,\mu\nu}$ eine Involution, deren Doppelpunkte $q_{\varkappa\lambda}$ und $q_{\mu\nu}$ sind.« (11.)

»Die 6 Ebenen $Q_{\varkappa\lambda}$, welche je eine Quergerade und eine Kante verbinden, berühren die Fläche längs der Kanten (stationäre Ebenen).« (11.)

»Die Quergeradenebene Q ist die einzige Tritangentialebene von F^3.« (11.)

---

[1]) Cremona, Intorno alla curva gobba etc. Annali di Matem. Bd. 4. S. 71.

[2]) Kummer, Berliner Monatsberichte 1863, auch Crelle's Journal Bd. 64, pag. 66.

Aus (12.) folgt, dass durch jede Gerade 4 Tangentialebenen an F^3 gehen oder:

»Die Fläche F^3 ist eine Fläche 4. Klasse.«

Ferner sahen wir, dass die Osculationskegel der Doppelpunkte Kegel 2. Ordnung und 2. Klasse sind (12.), d. h.

»Die Doppelpunkte von F^3 sind conisch.«

17. Anknüpfend an das letztere leite ich einige Eigenschaften der Osculationskegel ab. Zunächst ist klar, dass jeder Osculationskegel die Fläche F^3 längs der in seinem Scheitel sich treffenden Kanten berührt, und dass 2 Osculationskegel sich längs der Verbindungskante ihrer Spitzen tangiren.

Die 4 Osculationskegel umhüllen offenbar eine Fläche 2. Grades Φ^2, welche die Kanten berührt, da durch diese nur eine Tangentialebene an Φ^2 geht. Die Durchdringungscurve 6. Ordnung von Φ^2 mit F^3 hat daher in den Berührungspunkten Doppelpunkte und zerfällt deshalb in 3 Kegelschnitte, die sich paarweise in 2 Punkten schneiden. Also: »Die Osculationskegel umhüllen eine Fläche 2. Grades, deren Schnittcurve mit F^3 in 3 Kegelschnitte zerfällt.«

Der Osculationskegel in $a_\varkappa$ schneidet $A_\varkappa$ in einem durch die Ecken gehenden Kegelschnitt. Die 4 auf diesem Wege entstehenden Kegelschnitte finden sich ersichtlich auf einer Fläche 2. Ordnung G^2, welche durch die Ecken geht. In jeder Ecke z. B. in a_4 stossen nun 3 solche Kegelschnitte zusammen, und die Tangenten in a_4 sind die Geraden $(A_\lambda, Q_{\lambda 4}) = a_4\, q_{\varkappa\lambda}$ ($\varkappa = 1, 2, 3$; $\lambda = 1, 2, 3$); da aber die 3 Punkte q_{12}, q_{13}, q_{23} in der Geraden (A_4, Q) liegen, so ist die Verbindungsebene dieser Geraden mit a_4 die Tangentialebene von G^2 in a_4. Also: »Die Tangentialebenen der Fläche G^2 in den Ecken $a_\varkappa$ schneiden die Gegenflächen in denselben Geraden, wie die Quergeradenebene Q.«

18. Zufolge (16.) geht von einem beliebigen Punkte v ein Tangentialkegel 4. Klasse an F^3, für welchen die 3 Verbindungsebenen von v mit den Quergeraden Bitangentialebenen sind; die Ordnung des Kegels reducirt sich daher auf 6. Es ist leicht einzusehen, dass die Verbindungslinien

$va_\varkappa$ Doppelstrahlen des Kegels sind; denn durch jeden solchen gehen nur 2 Tangentialebenen an F^3. Diese 8 Tangentialebenen aber sind zugleich Tangentialebenen der Osculationskegel, umhüllen also den Berührungskegel, der von v an Φ^2 geht (17.). Folglich: »Der Tangentialkegel von einem Punkte v an F^3 ist 4. Klasse und 6. Ordnung mit 3 Bitangentialebenen; die 4 Strahlen $a_\varkappa v$ sind Doppelstrahlen des Kegels, ihre 8 Tangentialebenen umhüllen einen Kegel 2. Grades.«

Liegt v auf F^3 selbst, so ist die Tangentialebene von F^3 in v eine 4. Bitangentialebene des Tangentialkegels 4. Klasse, dieser löst sich deshalb in 2 Kegel 2. Grades auf. Diese beiden Kegel berühren F^3 längs zweier Raumcurven 3. Ordnung; vermöge (14.) ergiebt sich daher:

»Von einem Punkte der Fläche F^3 gehen 2 Tangentialkegel 2. Grades an F^3; sie berühren die Fläche längs zweier Raumcurven 3. Ordnung, die auf demselben einschaligen Hyperboloid liegen.«

Für einen Doppelpunkt vereinigen sich die beiden Tangentialkegel im Osculationskegel.

§ 4. Polareigenschaften der Fläche F^3.

19. Meine Absicht ist, nur diejenigen Polareigenschaften in Betracht zu ziehen, welche die Flächen 3. Ordnung mit 4 Doppelpunkten vor den allgemeinen Flächen 3. Ordnung auszeichnen und characterisiren.

Zunächst ist bemerkenswerth, dass das System von ersten Polarflächen, welche den sämmtlichen Punkten des Raumes in Bezug auf F^3 zugeordnet sind, durch eine Construction erhalten werden kann, welche nur die Kenntniss des Doppelpunkttetraeders und der Quergeraden voraussetzt. Auf den Quergeraden, welche die Diagonalen des Vierseits darstellen, in welchem die Flächen des Tetraeders von Q geschnitten werden, befinden sich 3 Involutionen, von denen immer 3 Punktpaare nach einem bekannten Satze auf einem Kegelschnitt liegen; die sämmtlichen Kegelschnitte bilden ein dreifach unendliches System, und jeder bestimmt mit den

4 Punkten a_x eine Fläche P^2 2. Grades, welche dem Polarflächensystem angehört; der Pol p dieser Fläche ist der Schnittpunkt der 3 Bitangentialebenen, deren Berührungspunkte die 3 Punktpaare sind. Die Uebereinstimmung dieser Definition mit der Forderung der allgemeinen Polarentheorie ergiebt sich sofort aus der Bemerkung, dass die 1. Polarfläche eines Punktes durch die Doppelpunkte der ursprünglichen Fläche und durch die Berührungspunkte der von dem Punkte an sie gehenden Tangenten geht. Ferner ist die Polarebene von p in Bezug auf P^2 zugleich die 2. Polarfläche oder Polarebene von p in Bezug auf F^3.

20. Weit fruchtbarer aber ist die Untersuchung der 1. Polarflächen der Punkte π von F^3 selbst. Man kann die Polarfläche von π als Ort des Punktes π' definiren, welcher von π harmonisch getrennt wird durch die beiden Schnittpunkte der Geraden $\pi\pi'$ mit F^3, und es ist eine unmittelbare Folge dieser Definition, dass die Berührungspunkte der von π an F^3 gehenden Tangenten der Polarfläche angehören. Nun bilden aber die Berührungspunkte 2 Raumcurven 3. Ordnung, welche, ihre Realität vorausgesetzt, ein einschaliges Hyperboloid bestimmen (18); dieses muss also mit der Polarfläche identisch sein; also:

»Die 1. Polarflächen aller Punkte der Fläche F^3, von denen reelle Tangentialkegel an F^3 gehen, sind einschalige Hyperboloide.«

Dieser Satz ist noch eines andern Ausdrucks fähig. Man nennt bekanntlich einen Punkt π hyperbolisch, elliptisch oder parabolisch, je nachdem seine Haupttangenten (d. h. die Tangenten im Doppelpunkte des Schnitts der Tangentialebene) reell, imaginär oder zusammenfallend sind. Die 1. Polarfläche von π enthält zufolge der Definition auch diese Haupttangenten, d. h. die Polarfläche eines hyperbolischen Punktes ist ein einschaliges Hyperboloid, eines elliptischen ein Ellipsoid oder zweischaliges Hyperboloid, eines parabolischen ein Kegel. Daher kann man sagen:

»Nur von hyperbolischen Punkten der F^3 lassen sich reelle Tangentialkegel an F^3 legen; von elliptischen Punkten

giebt es nur 3 reelle Bitangentialebenen ausser der Tangentialebene des Punktes selbst.«

Der letzte Theil des Satzes ist unmittelbar klar.

21. Ich wende mich jetzt zur Betrachtung der Polarflächen der besonderen Punkte der Fläche F^3. Ist π ein Punkt einer Quergeraden $q_{\varkappa\lambda,\mu\nu}$, so zerfällt der eine Tangentialkegel in das Ebenenpaar $Q_{\varkappa\lambda}, Q_{\mu\nu}$, dessen Berührungscurve aus $a_{\varkappa\lambda}$, $a_{\mu\nu}$, $q_{\varkappa\lambda,\mu\nu}$ besteht; die Polarflächen aller Punkte von $q_{\varkappa\lambda,\mu\nu}$ enthalten also diese 3 Geraden und sind Regelflächen. Jedes solche Hyperboloid schneidet Q ausser in $q_{\varkappa\lambda,\mu\nu}$ noch in einer Geraden; ist nämlich $\sigma_{\varkappa\lambda,\mu\nu}$ der Schnittpunkt der beiden andern Quergeraden und ρ der Punkt, welcher von π durch die beiden andern Punkte σ harmonisch getrennt wird, so liegt $\rho\sigma_{\varkappa\lambda,\mu\nu}$ zufolge obiger Definition (20) auf der Polarfläche von π und gehört offenbar zu derselben Schaar Erzeugender, wie $a_{\varkappa\lambda}$ und $a_{\mu\nu}$. Folglich: »Ein beliebiger Punkt π der Quergeraden $q_{\varkappa\lambda,\mu\nu}$ hat zur Polarfläche ein Hyperboloid, welches $q_{\varkappa\lambda,\mu\nu}$ in dem Punkte ρ berührt, der von π durch die andern Quergeraden harmonisch getrennt wird; $a_{\varkappa\lambda}$, $a_{\mu\nu}$, $\rho\sigma_{\varkappa\lambda,\mu\nu}$ gehören zu derselben Schaar Erzeugender, bestimmen also die Polarfläche.«

22. Wenn $p_{\varkappa\lambda}$ irgend ein Punkt der Kante $a_{\varkappa\lambda}$ ist, X eine Ebene durch $a_{\varkappa\lambda}$, welche F^3 noch in einem Kegelschnitte durchbohrt, $x_{\varkappa\lambda}$ die Polare von $p_{\varkappa\lambda}$ in Bezug auf den Kegelschnitt, so enthält $x_{\varkappa\lambda}$ alle Punkte, die von $p_{\varkappa\lambda}$ durch den Kegelschnitt harmonisch getrennt werden, also auf der Polarfläche von $p_{\varkappa\lambda}$ in Bezug auf F^3 liegen. Bei der Drehung von X um $a_{\varkappa\lambda}$ geht $x_{\varkappa\lambda}$ stets durch denselben Punkt $p'_{\varkappa\lambda}$, welcher zu $p_{\varkappa\lambda}$ harmonisch liegt in Bezug auf $a_\varkappa$ und a_λ. Folglich: »Die 1. Polarfläche eines Punktes $p_{\varkappa\lambda}$ einer Kante $a_{\varkappa\lambda}$ ist ein Kegel mit dem Scheitel in $p'_{\varkappa\lambda}$, welcher Punkt von $p_{\varkappa\lambda}$ durch $a_\varkappa$ und a_λ harmonisch getrennt wird; der Kegel ist der Ort der Polaren von $p_{\varkappa\lambda}$ in Bezug auf die Kegelschnitte von F^3, deren Ebenen durch $a_{\varkappa\lambda}$ gehen.«[1])

[1]) Offenbar ist auch $p_{\varkappa\lambda}$ der Doppelpunkt der Polarfläche von $p'_{\varkappa\lambda}$.

Der Schnitt des Kegels mit $Q_{\varkappa\lambda}$ reducirt sich auf $a_{\varkappa\lambda}$, und dies gilt für die Polarflächen aller Punkte von $a_{\varkappa\lambda}$; sie berühren sich also sämmtlich längs $a_{\varkappa\lambda}$. Fasst man die Kegel zweier Punkte $p_{\varkappa\lambda}$ und $t_{\varkappa\lambda}$ von $a_{\varkappa\lambda}$ auf, so ist ersichtlich, dass sie noch einen Kegelschnitt $\mathfrak{C}^2_{\mu\nu}$, der durch a_μ und a_ν geht, gemein haben. Eine beliebige Ebene X schneidet die beiden Kegel in den Polaren von $p_{\varkappa\lambda}$ resp. $t_{\varkappa\lambda}$ in Bezug auf den Kegelschnitt (X, F^3), der Pol von $a_{\varkappa\lambda}$ in Bezug auf (X, F^3) ist also ein Punkt von $\mathfrak{C}^2_{\mu\nu}$. Da dieser Pol unabhängig ist von der Wahl der Punkte $p_{\varkappa\lambda}$, $t_{\varkappa\lambda}$ so folgt:

»Jeder Kante $a_{\varkappa\lambda}$ ist ein Kegelbüschel zugeordnet, dessen Flächen sich längs $a_{\varkappa\lambda}$ berühren und einen Kegelschnitt $\mathfrak{C}^2_{\mu\nu}$ gemein haben, welcher der Ort des Pols von $a_{\varkappa\lambda}$ in Bezug auf das durch $a_{\varkappa\lambda}$ gehende Kegelschnittbüschel von F^3 ist.«

23. Die Lage des Kegelschnitts $\mathfrak{C}^2_{\mu\nu}$ wird erkannt mit Hülfe der Kegel, die sich in Ebenenpaare auflösen. Die Punkte $q_{\varkappa\lambda} = (q_{\varkappa\lambda,\mu\nu}, a_{\varkappa\lambda})$ gehören sowohl den Kanten als den Quergeraden an; die Polarfläche von $q_{\varkappa\lambda}$ ist daher ein Kegel, welcher die Geraden $a_{\varkappa\lambda}$, $a_{\mu\nu}$, $q_{\varkappa\lambda,\mu\nu}$ enthält (21.), und, da $a_{\varkappa\lambda}$, $a_{\mu\nu}$ sich nicht schneiden, in 2 Ebenen zerfallen muss, deren eine $Q_{\varkappa\lambda}$ ist, während die andere $R_{\mu\nu}$ durch $a_{\mu\nu}$ geht. $q_{\mu\nu}$ ist beiden Ebenen gemein; andrerseits ist der Punkt $r_{\varkappa\lambda}$, welcher von $q_{\varkappa\lambda}$ durch $a_\varkappa$, a_λ harmonisch getrennt ist, ein Doppelpunkt der Polarfläche von $q_{\varkappa\lambda}$, folglich ist $r_{\varkappa\lambda}\, q_{\mu\nu}$ die Doppellinie des Ebenenpaars. Ersichtlich stehen nun die Ebenen $R_{\mu\nu} = (a_{\mu\nu}\, r_{\varkappa\lambda})$ und $Q_{\mu\nu} = (a_{\mu\nu} q_{\varkappa\lambda})$ in der einfachen Beziehung, dass sie durch $A_\varkappa$ und A_λ harmonisch getrennt werden. Also:

»Die Polarflächen der Punkte $q_{\varkappa\lambda}$ sind Ebenenpaare $Q_{\varkappa\lambda}$, $R_{\mu\nu}$; je 2 Ebenen $Q_{\varkappa\lambda}$, $R_{\varkappa\lambda}$ bilden mit A_μ, A_ν ein harmonisches Büschel.«

24. Hiernach besitzt das der Kante $a_{\varkappa\lambda}$ zugeordnete Kegelbüschel ein Ebenpaar $Q_{\varkappa\lambda}$, $R_{\mu\nu}$. Da nun sämmtliche Kegel mit $Q_{\varkappa\lambda}$ die doppelt zu zählende Kante $a_{\varkappa\lambda}$ gemein haben, so muss $\mathfrak{C}^2_{\mu\nu}$ in $R_{\mu\nu}$ liegen. Noch mehr! Es giebt 6 solche Kegelschnitte, und ihre Ebenen schneiden sich in

demselben Punkte; denn auf sie ist das bekannte Theorem[1]) anwendbar: Werden die Punkte $q_{\varkappa\lambda}$, in denen eine Ebene Q die Kanten $a_{\varkappa\lambda}$ eines Tetraeders schneiden, mit den Gegenkanten $a_{\mu\nu}$ durch Ebenen $Q_{\mu\nu}$ verbunden und wird $R_{\mu\nu}$ durch die Tetraederflächen $A_\varkappa$, A_λ von $Q_{\mu\nu}$ harmonisch getrennt, so schneiden sich die 6 neuen Ebenen $R_{\mu\nu}$ in einem Punkte q, welcher das harmonische Centrum von Q heisst in Bezug auf das Tetraeder. Also:

»Die Ebenen der 6 Kegelschnitte $\mathfrak{C}^2_{\mu\nu}$ werden durch $A_\varkappa$, A_λ von $Q_{\mu\nu}$ harmonisch getrennt und haben das harmonische Centrum q der Quergeradenebene Q gemein.«

Zu dem Polarflächenbüschel einer Kante $a_{\varkappa\lambda}$ gehören auch die Osculationskegel von $a_\varkappa$ und a_λ; der Schnitt beider besteht also aus der doppelt zu zählenden Kante $a_{\varkappa\lambda}$ und dem Kegelschnitt $C^2_{\mu\nu}$.

25. Die Osculationskegel $K^2_\varkappa$, K^2_λ, K^2_μ in den Doppelpunkten $a_\varkappa$, a_λ, a_μ berühren sich in diesen 3 Punkten und schneiden sich zu zweien in den Kegelschnitten $C^2_{\mu\nu}$, $C^2_{\lambda\nu}$, $C^2_{\varkappa\nu}$, deren Ebenen die Gerade $a_\nu q$ gemein haben. Es ist nun sofort ersichtlich, dass diese 3 Kegelschnitte, weil je 2 auf demselben Kegel liegen, die Gerade $a_\nu q$ alle in demselben Punkte r_ν treffen, welcher daher den 3 Kegeln gemeinsam ist. Da die 3 Kegel das der Ebene A_ν zugehörige Polarflächennetz bestimmen, so folgt: »Die 1. Polarflächen aller Punkte einer Tetraederfläche $A_\varkappa$ berühren sich in den 3 Ecken von $A_\varkappa$ und haben ausserdem $a_\varkappa$ und einen Punkt $r_\varkappa$ gemein, welcher auf $a_\varkappa q$ liegt.«

Die 4 Punkte $r_\varkappa$ bilden also ein Tetraeder T_r, welches mit dem Doppelpunkttetraeder von F^3 perspectivisch liegt; das harmonische Centrum q der Ebene Q ist das Perspectivitätscentrum.

26. Auf der Geraden $(A_\varkappa, Q) = q_\varkappa$ liegen 3 Punkte $q_{\lambda\mu}$, $q_{\mu\nu}$, $q_{\lambda\nu}$, deren Polarflächen in die Ebenenpaare $Q_{\lambda\mu}$, $R_{\varkappa\nu}$; $Q_{\mu\nu}$, $R_{\varkappa\lambda}$; $Q_{\lambda\nu}$, $R_{\varkappa\mu}$ sich auflösen. Da die Polarflächen aller Punkte einer Geraden ein Büschel bilden, so muss das

[1]) Hermes, Crelle's Journal Bd. 56, p. 204.

eine Ebenenpaar die 4 Schnittlinien der beiden andern enthalten, was nur möglich ist, wenn die 6 Ebenen, d. h. ihre 3 Doppelgeraden in einem Punkte sich schneiden. Wir bezeichnen diesen Punkt, welcher bereits durch die 3 Ebenen $Q_{\lambda\mu}$, $Q_{\mu\nu}$, $Q_{\lambda\nu}$ bestimmt ist, aber auch, weil den Ebenen $R_{\varkappa\nu}$, $R_{\varkappa\lambda}$, $R_{\varkappa\mu}$ angehörig, auf deren Schnittlinie $a_\varkappa q$ liegt, durch $q_\varkappa$. Wir haben also folgendes Resultat:

»Die 6 Doppelgeraden $q_{\varkappa\lambda} r_{\mu\nu} = k_{\varkappa\lambda}$ der Ebenenpaare, die sich als Polarflächen der Punkte $q_{\varkappa\lambda}$ darstellen, sind die Kanten eines Tetraeders T_q, welches mit dem Tetraeder T_a perspectivisch liegt; q ist das Perspectivitätscentrum.«

Hieran schliesst sich sofort der Satz:

»Die 1. Polarflächen aller Punkte von $q_\varkappa$ sind Kegel, die ihre Spitzen sämmtlich in $q_\varkappa$ haben.«

Denn sie sind die Flächen eines Büschels, dessen Grundcurve aus den 4 sich in $q_\varkappa$ schneidenden Geraden $(Q_{\lambda\mu}, Q_{\mu\nu}) = a_\mu q_\varkappa$, $(Q_{\lambda\mu}, R_{\varkappa\lambda}) = a_\lambda q_\varkappa$, $(R_{\varkappa\nu}, Q_{\mu\nu}) = a_\nu q_\varkappa$, $(R_{\varkappa\nu}, R_{\varkappa\lambda}) = a_\varkappa q_\varkappa$ besteht, besitzen also alle in $q_\varkappa$ einen Doppelpunkt. Die Diagonalstrahlen des Vierkants $a_\lambda q_\varkappa$ ($\lambda = 1, 2, 3, 4$) sind die Doppelgeraden der 3 im Büschel vorkommenden Ebenenpaare.

27. Andrerseits sind auch die Polarflächen der in vieler Beziehung bemerkenswerthen Punkte $q_\varkappa$ leicht festzustellen. Denn nach obiger Construction (19.) ist die Polarfläche von $q_\varkappa$ durch a_1, a_2, a_3, a_4 und einen Kegelschnitt in Q bestimmt, welcher, weil $q_\varkappa = (Q_{\lambda\mu}, Q_{\mu\nu}, Q_{\lambda\nu})$ ist, ersichtlich durch die doppelt gerechnete Gerade $q_\varkappa$ dargestellt wird, zerfällt also in die Ebenen $A_\varkappa$ und $(q_\varkappa a_\varkappa)$ d. h.:

»Die Polarflächen der 4 Punkte $q_\varkappa$ lösen sich in die Ebenenpaare $A_\varkappa$, $(q_\varkappa a_\varkappa)$ mit den Doppelgeraden $q_\varkappa$ auf.«

Dieses Resultat lässt sich zur Bestimmung des Polarflächenbüschels der Geraden $k_{\varkappa\lambda}$ verwerthen. Weil nämlich auf $k_{\varkappa\lambda}$ die Punkte $q_\varkappa$, q_λ liegen, deren Polarflächen Ebenenpaare sind, und die Doppellinien $q_\varkappa$, q_λ der letztern in $q_{\mu\nu}$ sich schneiden, so gehen die 4 Schnittlinien der beiden Ebenenpaare, welche die Grundcurve des Büschels bilden,

durch $q_{\mu\nu}$, folglich haben alle Flächen des Büschels dort einen Doppelpunkt. Also:

»Jeder Geraden $k_{\varkappa\lambda}$ ist ein Büschel von Kegeln mit dem gemeinsamen Scheitel $q_{\mu\nu}$ zugeordnet.

28. Die 3 Tetraeder T_a, T_r, T_q haben eine bemerkenswerthe Lage zu einander, an die ich noch einige Bemerkungen knüpfe. Alle 3 Tetraeder sind perspectivisch in Bezug auf das Centrum q. Bezeichnet man ferner den Schnittpunkt $(a_\varkappa q, A_\varkappa)$ durch $b_\varkappa$, so wird $q_\varkappa$ von $b_\varkappa$ harmonisch getrennt durch $a_\varkappa$ und $r_\varkappa$; denn $a_\lambda q_\varkappa$ und $A_\varkappa$ sind Polarstrahl und Polarebene in Bezug auf den Osculationskegel K^2_λ, so dass die 4 Strahlen a_λ $(a_\varkappa, r_\varkappa, q_\varkappa, b_\varkappa)$ ein harmonisches Büschel bilden. Weil nun das nämliche für die Kegel K^2_μ und K^2_ν gilt, so bilden offenbar $b_\varkappa$ und $q_\varkappa$ ein conjugirtes Punktpaar in Bezug auf die 3 Kegel und also auch in Bezug auf das durch sie bestimmte Netz. Also: »Jeder der 4 Punkte $q_\varkappa$ bildet mit dem Schnittpunkt $(a_\varkappa q_\varkappa, A_\varkappa)$ ein conjugirtes Punktpaar in Bezug auf das Polarflächennetz von $A_\varkappa$.«

29. Wir haben schon oben (21.) von der Grundcurve des der Quergeraden $q_{\varkappa\lambda,\mu\nu}$ zugehörigen Polarflächenbüschels die Geraden $a_{\varkappa\lambda}$, $a_{\mu\nu}$, $q_{\varkappa\lambda,\mu\nu}$ und den Punkt $\sigma_{\varkappa\lambda,\mu\nu}$, in dem sich die beiden andern Quergeraden schneiden, kennen gelernt. Als vierte Gerade findet man durch die Bemerkung, dass die Ebenenpaare $Q_{\varkappa\lambda}$, $R_{\mu\nu}$; $Q_{\mu\nu}$, $R_{\varkappa\lambda}$ dem Büschel angehören, die Gerade $(R_{\mu\nu}, R_{\varkappa\lambda}) = r_{\varkappa\lambda} r_{\mu\nu} = r_{\varkappa\lambda,\mu\nu}$, welche also durch $\sigma_{\varkappa\lambda,\mu\nu}$ gehen muss und offenbar q enthält.

Die Polarfläche des Schnittpunktes $\sigma_{\varkappa\lambda,\mu\nu}$ zweier Quergeraden enthält daher diese beiden Quergeraden, die 4 zugehörigen Kanten und die Verbindungslinien von q mit den beiden andern Punkten $\sigma_{\varkappa\mu,\lambda\nu}$ und $\sigma_{\varkappa\nu,\lambda\mu}$. Hieraus ersieht man zunächst: »Die Polarfläche des Schnittpunktes $\sigma_{\varkappa\lambda,\mu\nu}$ zweier Quergeraden ist dasjenige Hyperboloid, welches aus dem durch die zugehörigen 4 Kanten gehenden Hyperboloidenbüschel durch den Punkt $\sigma_{\varkappa\lambda,\mu\nu}$ individualisirt wird; die Fläche berührt Q in $\sigma_{\varkappa\lambda,\mu\nu}$, und der Schnitt besteht aus den beiden Quergeraden.«

Auf diesem Wege erhalten wir 3 Hyperboloide, welche die 4 Punkte $a_\varkappa$ und die 3 Punkte $\sigma_{\varkappa\lambda,\mu\nu}$ gemein haben, also noch in einem Punkte sich schneiden. Zur Auffindung des letzteren genügt die Bemerkung, dass jeder Fläche zwei von den 3 Geraden $r_{\varkappa\lambda,\mu\nu}$, die sich in q schneiden, angehören; q ist also der verlangte Punkt. Mit Rücksicht darauf, dass die 3 Flächen das der Quergeradenebene Q zugeordnete Netz bestimmen, haben wir das interessante Resultat:

»Das harmonische Centrum q der Quergeradenebene Q in Bezug auf das Tetraeder T_a hat die Eigenschaft, dass die Polarflächen aller Punkte von Q durch q gehen; die übrigen 7 Grundpunkte des Netzes sind die Doppelpunkte von F^3 und die Schnittpunkte der Quergeraden.«

§ 5. Hesse'sche Fläche und Pentaeder der Fläche F^3.

30. Die im Vorigen entwickelten Eigenschaften solcher Polarflächen, welche einen Doppelpunkt besitzen, stehen naturgemäss im engsten Zusammenhange mit der Hesse'schen Fläche 4. Ordnung von F^3; denn diese ist sowohl der Ort der Doppelpunkte der ersten Polarflächen als der Ort der Punkte, deren Polarflächen Doppelpunkte haben. Die Punkte der Hesse'schen Fläche sind conjugirt, und zwar haben 2 conjugirte Punkte $\mathfrak{x},\mathfrak{x}'$ die Eigenschaft, dass die Polarfläche von $\mathfrak{x}$ einen Doppelpunkt in $\mathfrak{x}'$ hat und umgekehrt. Unter diesen Voraussetzungen ergeben sich aus dem Vorigen ohne Weiteres folgende Sätze:

»Die Hesse'sche Fläche H^4 geht durch die Kanten des Doppelpunkttetraeders von F^3, hat also die Ecken zu Doppelpunkten; je 2 Punkte der Kanten, die durch 2 Ecken harmonisch getrennt werden, sind conjugirte Punkte der Hesse'schen Fläche.« (22.)

»Die 6 Geraden $k_{\mu\nu}$, welche je einen Punkt $q_{\varkappa\lambda}$ mit demjenigen Punkte $r_{\mu\nu}$ verbinden, der zu $q_{\mu\nu}$, a_μ, a_ν harmonisch liegt, gehören der Hesse'schen Fläche an und bilden ein Tetraeder, dessen Ecken $q_\varkappa$ also Doppelpunkte von H^4 sind.« (26.)

»Auf der Hesse'schen Fläche liegen die 4 Geraden $q_\varkappa$; die 6 Punkte $q_{\varkappa\lambda}$ sind daher Doppelpunkte von H^4.« (26.)

»Die 6 Punkte $q_{\varkappa\lambda}$ sind den Geraden $k_{\mu\nu}$ und die 4 Punkte $q_\varkappa$ den Geraden $q_\varkappa$ beziehungsweise conjugirt.« (26. und 27.)

31. Aus den genannten Sätzen ziehe ich noch einige Schlüsse. Jede Ebene $Q_{\varkappa\lambda} = (a_{\varkappa\lambda} q_{\mu\nu}) = (a_{\varkappa\lambda} k_{\mu\nu})$ hat mit der Hesse'schen Fläche die beiden Geraden $a_{\varkappa\lambda}$, $k_{\mu\nu}$ gemein, schneidet sie also noch in einem Kegelschnitt, der durch die auf diesen beiden Geraden gelegenen Doppelpunkte von H^4 gehen muss, d. h. der Kegelschnitt hat mit $a_{\varkappa\lambda}$ die Punkte $a_\varkappa$, a_λ, $q_{\varkappa\lambda}$ und mit $k_{\mu\nu}$ die Punkte q_μ, q_ν, $q_{\mu\nu}$ gemein und löst sich deshalb in diese beiden Geraden auf. Daraus folgt:

»Die Ebenen $Q_{\varkappa\lambda}$ berühren die Hesse'schen Fläche längs der beiden Geraden $a_{\varkappa\lambda}$, $k_{\mu\nu}$.«

Da auch F^3 von $Q_{\varkappa\lambda}$ längs $a_{\varkappa\lambda}$ tangirt wird, so folgt in Rücksicht darauf, dass die doppelt gezählten Kanten mit einer Curve 12. Ordnung äquivalent sind:

»Die Fläche F^3 und ihre Hesse'sche berühren sich längs der Kanten des Doppelpunkttetraeders von F^3 und haben keine weiteren Punkte gemein.«

Dieser Satz nimmt bei Beachtung des Umstandes, dass die Durchschnittspunkte beider Flächen parabolische Punkte von F^3 sind (20.), die Form an:

»Die Kanten des Doppelpunkttetraeders der Fläche F^3 bilden ihre parabolische Curve.«

32. Ich wende mich jetzt zu der Untersuchung der Lagenverhältnisse der 16 Geraden und 14 Doppelpunkte der Hesse'schen Fläche, deren Existenz in den obigen Sätzen (30.) ausgesprochen ist. Zunächst stelle ich recapitulirend die diesbezüglichen Ergebnisse schematisch zusammen. Es liegen in den

Graden	$a_{\varkappa\lambda}$	die	3	Doppelpunkte	$a_\varkappa$	a_λ	$q_{\varkappa\lambda}$
„	$k_{\varkappa\lambda}$	„	3	„	$q_\varkappa$	q_λ	$q_{\varkappa\lambda}$
„	$q_\varkappa$	„	3	„	$q_{\lambda\mu}$	$q_{\lambda\nu}$	$q_{\mu\nu}$

und es gehen durch die

Punkte $a_\varkappa$ die 3 Geraden $a_{\varkappa\lambda}$ $a_{\varkappa\mu}$ $a_{\varkappa\nu}$
„ $q_\varkappa$ „ 3 „ $k_{\varkappa\lambda}$ $k_{\varkappa\mu}$ $k_{\varkappa\nu}$
„ $q_{\varkappa\lambda}$ „ 3 „ q_μ q_ν $k_{\varkappa\lambda}$

d. h. in Worten:

»Auf jeder der 16 Geraden der Hesse'schen Fläche liegen 3 Doppelpunkte und durch jeden der 14 Doppelpunkte gehen 3 Geraden der Fläche.«

Wir beschränken unsere Betrachtung jetzt auf die Doppelpunkte und Geraden der Hesse'schen Fläche, abzüglich derer, die zugleich Singularitäten von F^3 darstellen, d. h. auf die 10 Geraden $k_{\varkappa\lambda}$, $q_\varkappa$ und die 10 Doppelpunkte $q_{\varkappa\lambda}$, $q_\varkappa$. Bezeichnen wir die Ebenen des Tetraeders T_q durch $Q_\varkappa$, derart, dass $Q_\varkappa$ die 3 Punkte $q_\varkappa$, q_μ, q_ν verbindet, so ist vermöge des Vorigen folgendes Schema verständlich:

$q_{\varkappa\lambda}$ ist Schnittpunkt von Q Q_μ Q_ν
$q_\varkappa$ „ „ „ Q_λ Q_μ Q_ν
$k_{\varkappa\lambda}$ ist Schnittlinie von Q_μ Q_ν
$q_\varkappa$ „ „ „ Q $Q_\varkappa$

Das letztere bedarf noch einer Begründung, die sich jedoch leicht durch die Bemerkung erledigt, dass die Ebene $Q_\varkappa$ die 3 Geraden $k_{\lambda\mu} = q_{\lambda\mu} r_{\varkappa\nu}$, $k_{\lambda\nu} = q_{\lambda\nu} r_{\varkappa\mu}$, $k_{\mu\nu} = q_{\mu\nu} r_{\varkappa\lambda}$, also die 6 Punkte $q_{\lambda\mu}$ $q_{\lambda\nu}$ $q_{\mu\nu}$ $r_{\varkappa\lambda}$ $r_{\varkappa\mu}$ $r_{\varkappa\nu}$ enthält, von denen die ersten drei in der Geraden $q_\varkappa$ liegen. — Wir sehen also, dass die 10 Doppelpunkte und die 10 Geraden als Schnittpunkte resp. Schnittlinien der 5 Ebenen Q, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 sich darstellen, welche Figur von Steiner[1]) Pentaeder genannt worden ist. Daher können wir sagen mit Rücksicht auf (30.):

»Die 10 Doppelpunkte $q_{\varkappa\lambda}$, $q_\varkappa$ und die 10 Geraden $k_{\varkappa\lambda}$, $q_\varkappa$ der Hesse'schen Fläche bilden die Ecken resp. Kanten eines Pentaeders, so zwar, dass einem durch 3 Pentaederebenen bestimmten Punkte diejenige Gerade conjugirt ist, in der sich die beiden andern Pentaederebenen schneiden.«

---

[1]) Steiner, Flächen 3. Ordn. Crelle's Journ. Bd. 53, p. 194.

33. Das Pentaeder der Fläche F^3 theilt die eben genannte Eigenschaft mit dem Pentaeder der allgemeinen Fläche 3. Ordnung; es besitzt ausserdem einige Eigenschaften, die mit dem Doppelpunkttetraeder von F^3 im Zusammenhange stehen und daher nur Flächen 3. Ordnung mit 4 Doppelpunkten zukommen. Wegen der harmonischen Lage der 4 Punkte $a_\varkappa$, a_λ, $q_{\varkappa\lambda}$, $r_{\varkappa\lambda}$ bilden auch die Verbindungsebenen dieser Punkte mit $q_\varkappa$, d. h. die 4 Ebenen $(q_\varkappa\ a_\varkappa)$, $A_\varkappa$, Q, $Q_\varkappa$ ein harmonisches Büschel. Aus dieser Bemerkung fliesst folgende einfache Construction des Pentaeders der Flächen 3. Ordnung mit 4 Doppelpunkten:

»Das Pentaeder der Fläche F^3 besteht aus der Quergeradenebene Q und 4 Ebenen $Q_\varkappa$, deren jede von Q harmonisch getrennt wird durch die Ebenen $A_\varkappa$ und $(q_\varkappa\ a_\varkappa)$, wo $q_\varkappa$ die Schnittlinie $(A_\varkappa, Q)$ bedeutet.«

Die 4 Ebenen $Q_\varkappa$ bilden ein Tetraeder, dessen Ecken $q_\varkappa$ sind; dieses Tetraeder liegt nicht blos perspectivisch zu dem Tetraeder T_a, so zwar, dass q das Perspectivitätscentrum ist (26.), sondern lässt sich noch näher charakterisiren. Beachtet man, dass $Q_\varkappa$ die Verbindungsebene der 3 Punkte $r_{\varkappa\lambda}$, $r_{\varkappa\mu}$, $r_{\varkappa\nu}$ und $q_\varkappa$ der Schnittpunkt der der 3 Ebenen $Q_{\mu\lambda}$, $Q_{\mu\nu}$, $Q_{\lambda\nu}$ ist, so zeigt eine auf dem schon oben (24.) angewendeten Satze beruhende, einfache Ueberlegung, dass $q_\varkappa$ als harmonisches Centrum von $Q_\varkappa$ in Bezug auf das Tetraeder T_a sich darstellt. Das Tetraeder T_q, dessen Ecken also die harmonischen Centra der Gegenflächen sind in Bezug auf das Tetraeder T_a, kann als »in sich harmonisch« bezeichnet werden. Mit Einführung dieses Begriffes ergiebt sich:

»Das Pentaeder der Fläche F^3 besteht aus der Quergeradenebene Q und einem Tetraeder, welches in sich harmonisch und perspectivisch ist in Bezug auf das Doppelpunkttetraeder von F^3; das harmonische Centrum q der Quergeradenebene ist das Centrum der Perspectivität.«

34. Die Ebenen $A_\varkappa$ und $(q_\varkappa\ a_\varkappa)$, von denen wir sahen, dass sie durch Q und $Q_\varkappa$ harmonisch getrennt werden, bilden nach (27.) auch die Polarfläche von $q_\varkappa$. Ein ähnliches Verhalten zeigen auch die übrigen in Ebenenpaare zerfallen-

den Polarflächen. Zu dieser Erkenntniss gelangt man durch Betrachtung der folgenden ebenen Figur. Auf $a_{\varkappa\lambda}$ liegen die 4 Punkte $a_\varkappa$, a_λ, $q_{\varkappa\lambda}$, $r_{\varkappa\lambda}$, welche also, mit q verbunden, 4 harmonische Strahlen bilden. Ferner enthält $k_{\varkappa\lambda}$ die 4 Punkte $q_\varkappa$, q_λ, $q_{\varkappa\lambda}$, $r_{\mu\nu}$. Man überzeugt sich nun leicht, dass diese 4 Punkte gerade die Schnittpunkte von $k_{\varkappa\lambda}$ mit jenen 4 Strahlen sind, sodass $q_\varkappa$, q_λ durch $q_{\varkappa\lambda}$, $r_{\mu\nu}$ harmonisch getrennt werden, d. h.:

»Je 2 der 4 Doppelpunkte $q_\varkappa$ der Hesse'schen Fläche werden durch die Schnittpunkte ihrer Verbindungslinie mit den Kanten des Doppelpunkttetraeders der F^3 harmonisch getrennt.«

Mit Hülfe dieses Satzes ergiebt sich sofort das gewünschte Resultat. In der That sind die Verbindungsebenen von $k_{\mu\nu}$ mit $q_\varkappa$, q_λ, $q_{\varkappa\lambda}$, $r_{\mu\nu}$, d. h. die Ebenen Q_λ, $Q_\varkappa$, $Q_{\varkappa\lambda}$, $R_{\mu\nu}$, von denen die letzten beiden die Polarfläche von $q_{\varkappa\lambda}$ darstellen, während $Q_\varkappa$, Q_λ dem Pentaeder angehören, harmonisch. Dies giebt also das berühmte Steiner'sche Theorem:

»Die beiden Ebenen, welche die Polarfläche einer Pentaederecke darstellen, bilden mit den beiden durch ihre Schnittlinie gehenden Pentaederebenen ein harmonisches Büschel.«

§ 6. Verschiedene Eigenschaften und Erzeugungsweisen der Fläche F^3.

35. Für die Fläche F^3 und ihr Doppelpunkttetraeder gelten eine Reihe von Sätzen, die ihre Analoga in der Ebene haben für das Dreieck und den umgeschriebenen Kreis.

Zieht man durch einen Punkt π von F^3 einen beliebigen Strahl x, welcher die Fusspunktsebene Π in ξ trifft, und errichtet die Ebene X senkrecht auf x in ξ, so umhüllt X ein Rotationsparaboloid, welches π zum Brennpunkt und Π zur Scheiteltangentialebene hat; das Abbild p^∞ von π ist der unendlich ferne Punkt des Paraboloids. Fällt x mit dem von π auf $A_\varkappa$ gefällten Perpendikel zusammen, so deckt sich X mit $A_\varkappa$; das Paraboloid berührt also die Flächen des Tetraeders. Also:

»Jeder Punkt von F^3 ist der Brennpunkt eines Rotationsparaboloids, welches dem Doppelpunkttetraeder eingeschrieben ist.«

Wegen der eindeutigen Zuordnung der Punkte π und p^∞ ist auch jeder Punkt p^∞ der Berührungspunkt eines Rotationsparaboloids, welches die Ebenen $A_\varkappa$ berührt.

Aus obiger Erzeugungsweise des Rotationsparaboloids folgt, dass es durch den Brennpunkt und 3 Tangentialebenen bestimmt ist, weil letztere zur Fixirung der Scheiteltangentialebene hinreichen. Daher:

»Alle Rotationsparaboloide, die ihre Brennpunkte auf F^3 haben und 3 Tetraederflächen tangiren, berühren auch die vierte.«

36. Liegt π^∞ auf dem unendlich fernen Schnitt C^3 der Fläche F^3, so reducirt sich das zugehörige Rotationsparaboloid auf einen Kegelschnitt, welcher die 4 Geraden $(A_\varkappa, E_\infty) = a_\varkappa^\infty$ berührt und dessen Brennpunkte π^∞ und p^∞ sind; d. h.:

»Der unendlich ferne Schnitt von F^3 ist die Brennpunktscurve der Kegelschnittschaar, welche dem Vierseit der unendlich fernen Geraden der Tetraederflächen eingeschrieben ist; jedes Brennpunktspaar bildet ein Paar conjugirter Punkte der Curve.«[1])

Zugleich ersieht man, dass die Bildcurve von C^3 sich mit C^3 deckt, doch so, dass das Abbild eines Punktes π^∞ von C^3 in dem conjugirten p^∞ von π^∞ liegt.

37. Jede Gerade l ist in Bezug auf eine Rotationsfläche 2. Grades Axe eines involutorischen Ebenenbüschels, dessen Doppelebenen die Tangentialebenen sind; die rechtwinkligen Ebenen des Büschels halbiren die Winkel der Tangentialebenen und schneiden die Rotationsaxe in 2 Punkten, die durch die beiden Brennpunkte harmonisch getrennt werden. Rückt der eine Brennpunkt in's Unendliche, so gilt folgender Satz:

---

[1]) Schröter, Math. Annalen Bd. V. p. 50. Der particuläre Charakter, der einer im Endlichen gelegenen Brennpunktscurve zukommt, die beiden imaginären Kreispunkte zu conjugirten Punkten zu besitzen, wird natürlich in unserm Falle illusorisch.

Es sei l die Schnittlinie zweier Tangentialebenen T_1, T_2 eines Rotationsparaboloids, H_1, H_2 die Halbirungsebenen der Winkel (T_1, T_2); ist die Ebene E_1 parallel zur Rotationsaxe und E_2 die Ebene, welche von E_1 durch H_1, H_2 harmonisch getrennt wird, so geht E_2 durch den Brennpunkt der Fläche. Daraus ergiebt sich:

»Legt man durch die Kanten $a_{\varkappa\lambda}$ eines Tetraeders parallel mit derselben Richtung $\mathfrak{x}^\infty$ Ebenen $Y_{\varkappa\lambda}$, so schneiden sich die 6 Ebenen $X_{\varkappa\lambda}$, welche von $Y_{\varkappa\lambda}$ durch die winkelhalbirenden Ebenen $H_{\varkappa\lambda}, H'_{\varkappa\lambda}$ harmonisch getrennt werden, in einem Punkte ξ, dessen Ort die Fläche F^3 ist.« Denn $\mathfrak{x}^\infty$ ist, wie gezeigt (35.), Berührungspunkt eines Rotationsparaboloids, welches dem Tetraeder eingeschrieben ist, folglich gehen die 6 Ebenen $X_{\varkappa\lambda}$ durch den Brennpunkt ξ, und dieser liegt auf F^3.

Die Ebenen $X_{\varkappa\lambda}$ beschreiben, wenn $\mathfrak{x}^\infty$ die E_∞ durchläuft, Ebenenbüschel von der Beziehung, die August[1]) als doppeltprojectivisch bezeichnet. Die im letzten Satze ausgesprochene August'sche Erzeugungsweise erhält einen andern Ausdruck, wenn man bemerkt, dass, weil von den 4 harmonischen Ebenen $Y_{\varkappa\lambda}, X_{\varkappa\lambda}, H_{\varkappa\lambda}, H'_{\varkappa\lambda}$ die letzten beiden einen rechten Winkel bilden,

$$\text{Winkel } (Y_{\varkappa\lambda}, H_{\varkappa\lambda}) = (X_{\varkappa\lambda}, H'_{\varkappa\lambda}) \text{ ist; da}$$
$$\text{Winkel } (A_\varkappa, H_{\varkappa\lambda}) = (A_\lambda, H'_{\varkappa\lambda}), \text{ so folgt}$$

durch Subtraction Winkel $(A_\varkappa, Y_{\varkappa\lambda}) = (A_\lambda, X_{\varkappa\lambda})$. Daher:

»Verbindet man die Kanten $a_{\varkappa\lambda}$ mit $\mathfrak{x}^\infty$ durch Ebenen $Y_{\varkappa\lambda}$ und construirt $X_{\varkappa\lambda}$ so, dass Winkel $(A_\varkappa, Y_{\varkappa\lambda}) = (X_{\varkappa\lambda}, A_\lambda)$ ist, so beschreiben die Ebenen $X_{\varkappa\lambda}$ doppeltprojectivische Ebenenbüschel, deren Erzeugniss die Fläche F^3 ist.«

38. Die August'sche Erzeugungsweise liefert zwischen den Punkten von F^3 und der Abbildung eine Beziehung, die sich zu einigen Folgerungen verwerthen lässt. Verbindet man einen beliebigen Punkt π einer Quergeraden $q_{\varkappa\lambda,\mu\nu}$ und sein Abbild p^∞ mit $a_{\varkappa\lambda}$ durch Ebenen, so schneiden diese $a_{\mu\nu}$ in $q_{\mu\nu}$ resp. $a^\infty_{\varkappa\lambda}$ und werden durch $H_{\varkappa\lambda}$ und $H'_{\varkappa\lambda}$ har-

[1]) August, disquisitiones de superf. III. ord. Berolini 1862.

monisch getrennt, folglich ist »$q_{\mu\nu}$ der Mittelpunkt der Strecke, welche von $H_{\varkappa\lambda}$, $H'_{\varkappa\lambda}$ auf $a_{\mu\nu}$ abgeschnitten wird.«

Die 12 winkelhalbirenden Ebenen $H_{\varkappa\lambda}$, $H'_{\varkappa\lambda}$ schneiden sich zu sechs; die so entstehenden 8 Punkte sind die Centra der eingeschriebenen Kugeln des Tetraeders. Jede Centrale c geht offenbar entweder durch eine Ecke oder schneidet zwei Gegenkanten, in jedem Falle hat sie mit F^3 noch einen Punkt c gemein, der sich leicht angeben lässt. Denn ist $c = (H_{\varkappa\lambda}, H_{\mu\nu})$, so findet man sofort, dass der unendlich ferne Punkt c^∞ von c das Abbild von c ist, woraus folgt, dass c in der Mitte zwischen den beiden auf c gelegenen Centren sich befindet. Da 28 Verbindungen der 8 Centren zu zweien möglich sind, so haben wir den Satz:

»Die 28 Mittelpunkte der Strecken, welche durch je 2 der 8 Centren der eingeschriebenen Kugeln des Tetraeders begrenzt werden, liegen auf F^3.«

39. Die 8 Centren liegen zu je vier auf 2 winkelhalbirenden Ebenen $H_{\varkappa\lambda}$, $H'_{\varkappa\lambda}$, sind daher die Grundpunkte eines Flächennetzes 2. Ordnung, welches durch 3 der 6 Ebenenpaare bestimmt ist. Die 28 Punktpaare c, c^∞ sind offenbar conjugirt in Bezug auf das Netz. Es fragt sich, welchen Ort sämmtliche Punkte erfüllen, die zu den unendlich fernen Punkten conjugirt sind in Bezug auf das Netz. Die Polarebenen von ξ^∞ in Bezug auf irgend 3 Flächen des Netzes beschreiben 3 projectivische Ebenenbündel, deren Erzeugniss nach Grassmann[1]) eine Fläche 3. Ordnung ist, und diese ist mit F^3 identisch, da beide 28 Punkte gemein haben und 19 Punkte schon eine Fläche 3. Ordnung bestimmen. Also:

»Die Fläche F^3 ist der Ort der conjugirten Punkte zu allen unendlich fernen Punkten in Bezug auf das Netz der 8 Kugelcentra.« Oder:

»Die Fläche F^3 wird durch die 3 Diametralebenenbündel von irgend 3 Flächen des Netzes erzeugt.«

Die Fläche F^3 enthält auch die Mittelpunkte der drei

[1]) Grassmann, Crelle's Journ. Bd. 49, p. 62. Auch Schröter ibid. Bd. 62, p. 265.

Diametralebenenbündel, d. h. der 3 Flächen; da diese beliebig gewählt waren, so folgt:

»Die Fläche F^3 ist der Ort der Mittelpunkte aller Flächen des Netzes der 8 Kugelcentra.«

40. Der Zusammenhang zwischen der Grassmann'schen und August'schen Erzeugungsweise wird erkannt durch die Wahl dreier Ebenenpaare $H_{\varkappa\lambda}$, $H'_{\varkappa\lambda}$ statt der 3 Flächen 2. Grades und durch die Bemerkung, dass die Polarebene eines Punktes ξ in Bezug auf ein Ebenenpaar durch die Doppelgerade $a_{\varkappa\lambda}$ geht und mit den Ebenen $H_{\varkappa\lambda}, H'_{\varkappa\lambda}, (a_{\varkappa\lambda}\xi)$ ein harmonisches Büschel bildet. Statt der 3 Diametralebenenbündel treten dann 3 doppelprojectivische Ebenenbüschel auf, welche die Doppelgeraden zu Axen haben.

Weil nun die Ebenen $H_{\varkappa\lambda}, H'_{\varkappa\lambda}, A_\mu, A_\nu$ harmonische Lage haben, so ist offenbar $a_\varkappa$ Pol von $A_\varkappa$ in Bezug auf die 3 winkelhalbirenden Ebenenpaare der in $A_\varkappa$ gelegenen Kanten und folglich in Bezug auf das Netz d. h. das Tetraeder ist in sich conjugirt in Bezug auf das Netz der Kugelcentra. Die Individuen des Netzes sind daher nach Salmon[1]) sämmtlich gleichseitige Hyperboloide, d. h. solche, deren Asymptotenkegel Systeme von 3 zu einander rechtwinkligen Strahlen besitzt. Es giebt in dem Netz offenbar unendlich viele gleichseitige Paraboloide (sc. hyperbolische), deren Mittelpunkte den unendlich fernen Schnitt C^3 der Fläche F^3 erfüllen. Das Netz besitzt ferner 6 rechtwinklige Ebenenpaare, deren Doppelgeraden die Kanten sind. Die Kegelspitzencurve[2]) 6. Ordnung des Netzes zerfällt deshalb in die 6 Kanten $a_{\varkappa\lambda}$, und es ist klar, dass die nicht zerfallenden Kegel des Netzes in den Ecken $a_\varkappa$ ihre Doppelpunkte haben; denn jeder Punkt einer Kante, der zugleich Spitze eines Kegels des Netzes ist, ist ein Doppelpunkt der Kegelspitzencurve. Also: »Das Netz der Kugelcentra besteht aus gleichseitigen

[1]) Salmon-Fiedler, Analyt. Geom. des Raumes. Bd. I, § 203 und 211.

[2]) Hesse, Doppeltang. der C. 4. Ordnung. Crelle's Journal Bd. 49, p. 27.

Hyperboloiden, unter denen sich unendlich viele Paraboloide befinden, deren Mittelpunkte eine Curve 3. Ordnung im Unendlichen bilden; die Kegelspitzencurve des Netzes zerfällt in die 6 Kanten, welche die Doppelgeraden von 6 rechtwinkligen Ebenenpaaren des Netzes sind; die übrigen Kegel des Netzes haben ihre Scheitel in den Ecken des Tetraeders.«

Das Flächennetz inducirt auf E_∞ ein Netz von Kegelschnitten von der Beschaffenheit, dass auf jedem unendlich viele Tripel von Punkten liegen, die in Bezug auf den imaginären Kreis conjugirt sind; das Netz würde nach Rosanes[1]) als conjugirt in Bezug auf den imaginären Kreis zu bezeichnen sein. Die Geradenpaare des Netzes rühren von den Paraboloiden her, die Hesse'sche Curve ist daher mit C^3 identisch. Also:

»Der unendlich ferne Schnitt C^3 von F^3 ist die Hesse'sche Curve eines Kegelschnittnetzes, welches in Bezug auf den imaginären Kreis conjugirt ist.«

41. Alle Hyperboide, welche denselben Asymptotenkegel besitzen, also concentrisch sind und sich im Unendlichen längs desselben Kegelschnittes berühren, bilden ein Netz, zu welchem der Asymptotenkegel und die unendlich ferne Ebene gehört, letztere aufgefasst als System von 2 Ebenen, also als Fläche mit doppelt unendlich vielen Doppelpunkten. Auf diese Weise liefert jedes Individuum des Flächennetzes der Kugelcentra ein Netz gleichseitiger Hyperboloide, und die Gesammtheit aller bildet ein System von dreifacher Mannigfaltigkeit, dessen Hesse'sche Fläche (Ort der Doppelpunkte des Systems) offenbar aus F^3 und E_∞ sich zusammensetzt. Also:

»Die Fläche F^3 bildet mit der unendlich fernen Ebene die Hesse'sche Fläche eines Systems gleichseitiger Hyperboloide.«

§ 7. Verschiedene Eigenschaften und Erzeugungsweisen der Fläche F^3. Fortsetzung.

42. An die Existenz der Quergeraden der Fläche 3. Ordnung mit 4 Doppelpunkten haben sich schon eine grosse

[1]) Rosanes, Systeme v. Kegelschn. Math. Annalen Bd. VI. p. 264.

Anzahl charakteristischer Eigenschaften von F^3 geknüpft; es giebt deren noch andere.

Zwei Paar Gegenkanten $a_{\varkappa\lambda}$, $a_{\mu\nu}$ und $a_{\varkappa\mu}$, $a_{\lambda\nu}$ eines Tetraeders können als Grundcurve eines Hyperboloidenbüschels $B(H^2)$ angesehen werden, in Bezug auf welches jeder Geraden ein Polarhyperboloid P^2 zugeordnet ist. Einem Strahlenbündel mit dem Grundpunkte σ entspricht demnach ein Netz $N(P^2)$, und die Durchschnittspunkte entsprechender Elemente der beiden Gebilde erfüllen eine Fläche 3. Ordnung. Denn einem ebenen Strahlenbüschel $\sigma(x)$ gehört ein Flächenbüschel $B(P^2)$ zu, welches die Ebene X des Strahlbüschels in einem Kegelschnittbüschel $b(p^2)$ schneidet; das Erzeugniss von $\sigma(x)$ und $b(p^2)$ ist aber eine allgemeine Curve 3. Ordnung S^3; jede Gerade l hat also 3 Punkte mit der gesuchten Fläche gemein, da der Schnitt der Ebene $(l\,\sigma)$ von der 3. Ordnung ist.

Man überzeugt sich leicht, dass jeder Kegelschnitt p^2 die conjugirten Punkte aller Punkte einer Geraden x enthält in Bezug auf das Kegelschnittbüschel $b(h^2)$, welches durch $B(H^2)$ auf X inducirt wird, dass also S^3 der Ort der conjugirten Punktpaare auf den Geraden x von $\sigma(x)$ in Bezug auf $b(h^2)$ ist. Geht x insbesondere durch einen Grundpunkt des Kegelschnittbüschels $b(h^2)$ (Spur einer der 4 Kanten), so vereinigen sich offenbar in diesem Grundpunkte die beiden conjugirten Punkte, folglich besteht der Schnitt der Ebene, die eine der 4 Kanten, z. B. $a_{\varkappa\lambda}$, mit σ verbinden, mit der Fläche aus der doppelt zu zählenden Kante $a_{\varkappa\lambda}$ und einer Geraden $q'_{\varkappa\lambda,\mu\nu}$, die durch σ geht und $a_{\varkappa\lambda}$, $a_{\mu\nu}$ gleichzeitig schneidet, da diese Gerade in den Schnittpunkten mit $a_{\varkappa\lambda}$ und $a_{\mu\nu}$ je 2 Punkte mit der Fläche gemein hat, also auf ihr liegen muss. — Wenn ferner der Schnitt der Ebenen $(a_{\varkappa\nu}\,\sigma)$ und $(a_{\lambda\mu}\,\sigma)$ betrachtet wird, wo $a_{\varkappa\nu}$, $a_{\lambda\mu}$ nicht zu den 4 windschiefen Kanten gehören, so zeigt sich, dass die Grundpunkte des Büschels $b(p^2)$ auf 2, nämlich die Ecken der betreffenden Kante, sich reduciren; diese beiden Punkte sind also Doppelpunkte der Schnittcurve, folglich liegen $a_{\varkappa\nu}$, $a_{\lambda\mu}$ auch auf der Fläche, letztere hat also die Ecken des Tetrae-

ders zu Doppelpunkten. Nun werden aber $a_{\varkappa\nu}$, $a_{\lambda\mu}$ von der Ebene der beiden Geraden $q'_{\varkappa\lambda,\mu\nu}$, $q'_{\varkappa\mu,\lambda\nu}$ in 2 Punkten geschnitten, deren Verbindungslinie $q'_{\varkappa\nu,\lambda\mu}$ vier Punkte mit der Fläche gemein hat, folglich auf derselben liegt. Da das Doppelpunkttetraeder und die 3 besonderen Geraden mit 19 Bedingungen äquivalent sind, die Fläche also durch diese Data bestimmt ist, so ist ersichtlich, dass wir unsre Fläche F^3 erhalten, wenn als Grundpunkt des Strahlbündels der Schnittpunkt $\sigma_{\varkappa\nu,\lambda\mu}$ der beiden Quergeraden gewählt wird, die den 4 ursprünglichen Kanten zugehören. Also:

»Die Fläche F^3 kann auf 3 Arten als Ort der Durchschnittspunkte entsprechender Elemente eines Strahlbündels und eines Hyperboloidennetzes erzeugt werden; der Grundpunkt des Bündels ist der Schnittpunkt zweier Quergeraden, das Netz besteht aus den Polarhyperboloiden, welche den Strahlen des Bündels zugeordnet sind in Bezug auf das Flächenbüschel durch die zugehörigen Kanten.«

43, Man kann nach dem Vorigen F^3 auch als Ort der conjugirten Punktpaare definiren auf allen Geraden durch $\sigma_{\varkappa\nu,\lambda\mu}$ in Bezug auf das Flächenbüschel $B(H^2)$. In dem Flächenbüschel befinden sich die Ebenenpaare A_λ, A_μ und $A_\varkappa$, A_ν, deren Doppellinien die beiden übrigen Kanten $a_{\varkappa\nu}$ resp. $a_{\lambda\mu}$ sind, und welche das Flächenbüschel bereits bestimmen. Daraus ergiebt sich folgende Eigenschaft der Fläche F^3:

»Jede Gerade x durch den Schnittpunkt $\sigma_{\varkappa\nu,\lambda\mu}$ zweier Quergeraden schneidet die Fläche F^3 noch in 2 Punkten, welche gleichzeitig harmonisch liegen zu den beiden Punktpaaren, in denen x den Tetraederflächenpaaren A_λ, A_μ und $A_\varkappa$, A_ν begegnet.«

Die Betrachtungen in No. 42 lassen auch unmittelbar erkennen, dass die Schnittcurve einer Ebene X durch σ das Tripel conjugirter Punkte enthält, welches dem Kegelschnittbüschel $b(h^2)$ zugehört, d. h. die Diagonalpunkte des Vierecks der Grundpunkte. F^3 kann daher auch auf folgende Weise erzeugt werden:

»Die Diagonalpunkte der Vierecke, in denen 4 wind-

schiefe Kanten des Tetraeders durch alle Ebenen des Bündels, dessen Grundpunkt der Schnittpunkt der zugehörigen Quergeraden ist, geschnitten werden, erfüllen die Fläche F^3.«

Diese Erzeugungsweise liefert eine lineare Construction von F^3.

44. Mit Hülfe der Untersuchungen in (42.) und (43.) lassen sich leicht die Erzeugungsweisen, welche Steiner für die allgemeine Fläche 3. Ordnung gegeben hat, für den Fall ableiten, dass die Fläche 4 Doppelpunkte besitzt. Durch die Bemerkung, dass es in einem Flächenbüschel 2. Ordnung 2 Flächen giebt, die eine beliebige Gerade berühren, und dass deren Berührungspunkte die Doppelpunkte der auf der Geraden durch das Flächenbüschel inducirten Involution sind, ergiebt sich aus (43.):

»Die Fläche F^3 ist der Ort der Berührungspunkte aller Tangenten, die sich von $\sigma_{\varkappa\nu,\lambda\mu}$ an die Hyperboloide des Büschels B (H^2) legen lassen.«

Ein anderer Ausdruck dieses Satzes fliesst aus dem Umstande, dass der Tangentialkegel von $\sigma_{\varkappa\nu,\lambda\mu}$ an jede Fläche des Büschels B (H^2) das Hyperboloid H^2 längs eines Kegelschnitts berührt, dessen Ebene die Polarebene von $\sigma_{\varkappa\nu,\lambda\mu}$ in Bezug auf H^2 ist; folglich:

»Die Kegelschnitte, in denen jede Fläche H^2 des Büschels B (H^2) von der Polarebene des Punktes $\sigma_{\varkappa\nu,\lambda\mu}$ in Bezug auf H^2 geschnitten werden, erfüllen die Fläche F^3.«

Nun bilden aber die Polarebenen von $\sigma_{\varkappa\nu,\lambda\mu}$ in Bezug auf die Flächen des Büschels B (H^2) ein Ebenenbüschel, dessen Axe die conjugirte Polare von $\sigma_{\varkappa\nu,\lambda\mu}$ in Bezug auf B(H^2) ist und leicht mit Hülfe der beiden Ebenenpaare A_λ, A_μ und $A_\varkappa$, A_ν des Flächenbüschels sich auffinden lässt. Die gesuchte Polare liegt sowohl in der Ebene, die von A_λ, A_μ durch ($a_{\varkappa\nu}$ $\sigma_{\varkappa\nu,\lambda\mu}$) harmonisch getrennt ist, also den beiden Quergeraden, die sich in $\sigma_{\varkappa\nu,\lambda\mu}$ schneiden, in den Punkten $\sigma_{\varkappa\lambda,\mu\nu}$ und $\sigma_{\varkappa\mu,\lambda\nu}$ begegnet (11. Ende), als auch in der 4. harmonischen Ebene zu ($a_{\lambda\mu}$ $\sigma_{\varkappa\nu,\lambda\mu}$), $A_\varkappa$, A_ν, von der dasselbe gilt; die Polare von $\sigma_{\varkappa\nu,\lambda\mu}$ ist also die Quergerade $q_{\varkappa\nu,\lambda\mu}$. Folglich:

»Die Fläche F^3 ist der Ort der Schnittcurven eines Ebenenbüschels um eine Quergerade mit den Flächen eines mit ihm projectivischen Hyperboloidenbüschels, welches durch die nicht zugehörigen Kanten geht.«

Diese Erzeugungsweise ist auch eine unmittelbare Folgerung eines früheren Satzes (15. Ende). Sie giebt zugleich eine 3. Definition des unendlich fernen Schnitts C^3 von F^3, nämlich als Erzeugniss eines Kegelschnitt- und eines Strahlbüschels. (Chasles.) C^3 ist also eine Curve 3. Ordnung und 6. Klasse mit 9 Wendepunkten, von denen 3 reell sind.

§ 8. Die Reciproke der Fläche F^3.

45. Die Grundlage der folgenden Untersuchungen, welche im Anschluss an eine Erzeugungsweise der Fläche F^3 vorzugsweise der Reciprokalfläche der letzteren gewidmet werden, bilden die bekannten Sätze über die harmonischen Eigenschaften des Tetraeders.

Wenn man einen Punkt η des Raumes mit den Kanten $a_{\varkappa\lambda}$ eines Tetraeders durch Ebenen $Y_{\varkappa\lambda}$ verbindet und zu den Schnittpunkten $(a_{\mu\nu}, Y_{\varkappa\lambda})$ die 4. harmonischen Punkte construirt in Bezug auf die Ecken a_μ, a_ν, so liegen die 6 neuen Punkte in einer Ebene Y, deren harmonisches Centrum η ist; und reciprok (vergl. 24.). Analoge Sätze gelten auch in der Ebene für das Dreieck. Verbindet man einen Punkt η mit den Ecken $a_\varkappa$ eines Dreiecks und sucht auf jeder Seite $a_\varkappa$ zu dem Schnittpunkt mit $\eta a_\varkappa$ den 4. harmonischen Punkt in Bezug auf die Ecken a_λ, a_μ, so liegen die 3 neuen Punkte in einer Geraden y, deren harmonisches Centrum η ist; und umgekehrt.

Durch den ersten Satz wird ein Beziehungssystem zwischen den Punkten und Ebenen des Raumes in Bezug auf ein Tetraeder hergestellt. Jedem Punkte η entspricht eine Ebene Y und jeder Ebene ein Punkt. Insbesondere ist einem Punkte einer Kante jede Ebene durch dieselbe Kante als zugeordnet anzusehen, und ebenso ist das harmonische Centrum einer Ebene durch eine Kante unbestimmt auf dieser Kante. Bewegt sich ein Punkt η auf einer Geraden, so

umhüllt die Ebene Y eine Developpable 3. Klasse; denn schneiden die Verbindungsebenen von $\mathfrak{y}$ mit den Kanten a_{12}, a_{13}, a_{23} die Gegenkanten resp. in $\mathfrak{z}_{34}$, $\mathfrak{z}_{24}$, $\mathfrak{z}_{14}$ und sind $\mathfrak{z}'_{34}$, $\mathfrak{z}'_{24}$, $\mathfrak{z}'_{14}$ die 4. harmonischen Punkte zu diesen in Bezug auf die Ecken, so beschreiben die letzten 3 Punkte 3 projectivische Punktreihen auf den gleichnamigen Kanten, ihre Verbindungsebene also eine abwickelbare Fläche 3. Klasse. — Auf gleiche Weise ist einem Ebenenbüschel in Bezug auf das Tetraeder eine Raumcurve 3. Ordnung zugeordnet.

46. Dreht sich eine Ebene Y um einen festen Punkt $\mathfrak{p}$, so beschreibt das harmonische Centrum $\mathfrak{y}$ eine Fläche, welche mit einer beliebigen Graden l drei Punkte gemein hat, da von $\mathfrak{p}$ an die der Punktreihe l entsprechende Developpable 3. Klasse 3 Tangentialebenen gehen. Nach den obigen Bemerkungen enthält die Fläche, wo auch der Punkt $\mathfrak{p}$ angenommen sein mag, stets die Kanten des Tetraeders, hat also in den Ecken Doppelpunkte. Also jedem Ebenenbündel entspricht eine Fläche 3. Ordnung mit 4 Doppelpunkten.

Jedem Ebenenbüschel im Ebenenbündel $\mathfrak{p}$ (Y) ist eine Raumcurve 3. Ordnung zugeordnet, welche auf der Fläche liegt und durch die Doppelpunkte derselben geht. Schneidet insbesondere die Axe des Ebenenbüschels 2 Gegenkanten $a_{\varkappa\lambda}$, $a_{\mu\nu}$, so zerfällt die Raumcurve in diese Kanten und eine dritte Gerade, welche ihrer Lage nach leicht zu ermitteln ist. Ist nämlich $g_{\varkappa\lambda,\mu\nu}$ die Axe, $g_{\varkappa\lambda}$ und $g_{\mu\nu}$ ihre Schnittpunkte mit $a_{\varkappa\lambda}$ resp. $a_{\mu\nu}$, $g'_{\varkappa\lambda}$ und $g'_{\mu\nu}$ die Punkte, welche von $g_{\varkappa\lambda}$ resp. $g_{\mu\nu}$ durch die Ecken harmonisch getrennt werden, so liegt das harmonische Centrum einer beliebigen Ebene X des Büschels, weil X die Kanten $a_{\varkappa\lambda}$, $a_{\mu\nu}$ in $g_{\varkappa\lambda}$ resp. $g_{\mu\nu}$ schneidet, auf den Ebenen $(a_{\varkappa\lambda}\, g'_{\mu\nu})$ und $(a_{\mu\nu}\, g'_{\varkappa\lambda})$ d. h. auf ihrer Schnittlinie $g'_{\varkappa\lambda}\, g'_{\mu\nu}$, welche die gesuchte ist. Es giebt 3 solche Geraden, und sie liegen, wie man erkennt, in der Ebene, deren harmonisches Centrum $\mathfrak{p}$ ist.

Aus dem System von Flächen 3. Ordnung mit demselben Doppelpunkttetraeder, welches sich durch Aenderung des Punktes $\mathfrak{p}$ ergiebt, wird unsere Fläche F^3 individualisirt, wenn $\mathfrak{p}$ in den Punkt $\mathfrak{q}$ rückt; daher:

»Die Fläche F^3 ist der Ort der harmonischen Centra der Ebenen, welche das harmonische Centrum der Quergeradenebene enthalten.«

47. »Die Reciproke der Fläche F^3 kann nach dem Vorigen als die Enveloppe der Ebene definirt werden, deren harmonisches Centrum auf die Quergeradenebene Q beschränkt ist.« Da einem beliebigen Ebenenbüschel mit der Axe l eine Raumcurve 3. Ordnung entspricht, welche die Ebene Q in 3 Punkten trifft, so giebt es durch l an die Enveloppe 3 Tangentialebenen; daher ist sie eine Fläche 3. Klasse S^3.

In welchem Zusammenhang stehen die Flächen des Tetraeders mit S^3? Es sei l eine beliebige Gerade auf der Tetraederfläche $A_\varkappa = (a_\lambda a_\mu a_\nu)$, ihre Schnittpunkte mit den in $A_\varkappa$ liegenden Kanten seien $t_{\lambda\mu}$, $t_{\lambda\nu}$, $t_{\mu\nu}$ und die 4. harmonischen zu diesen in Bezug auf die Ecken $t'_{\lambda\mu}$, $t'_{\lambda\nu}$, $t'_{\mu\nu}$. Die Verbindungsebenen der letzten 3 Punkte mit den durch $a_\varkappa$ gehenden Kanten schneiden sich in $a_\varkappa c_\varkappa$, wo $c_\varkappa$ das harmonische Centrum von l in Bezug auf das Dreieck $a_\lambda a_\mu a_\nu$ ist. Da nun $a_\varkappa c_\varkappa$ mit Q nur einen Punkt gemein hat, so geht durch l nur eine von $A_\varkappa$ verschiedene Tangentialebene an S^3; daraus ziehen wir den Schluss: »Die Flächen des Tetraeders sind doppelte Tangentialebenen von S^3.«

Fällt insbesondere der Schnittpunkt $(a_\varkappa c_\varkappa, Q)$ auf die Gerade $q_\varkappa = (A_\varkappa, Q)$, so giebt es durch die Gerade l ausser $A_\varkappa$ keine Tangentialebene, d. h. l ist Tangente der Berührungscurve, welche von l umhüllt wird, wenn $c_\varkappa$ die Gerade $q_\varkappa$ durchläuft. Wird nun $c_\varkappa$ mit a_λ und a_μ verbunden und werden zu den Schnittpunkten $(a_\lambda c_\varkappa, a_{\mu\nu})$ und $(a_{\lambda\nu}, a_\mu c_\varkappa)$ die 4. harmonischen gesucht in Bezug auf die Ecken, so beschreiben diese 2 projectivische Punktreihen, ihre Verbindungslinie l einen Kegelschnitt, welcher die Seiten des Dreiecks $a_\lambda a_\mu a_\nu$ berührt, d. h.: »Die Fläche S^3 berührt die Tetraederflächen längs Kegelschnitten, welche den Kantendreiseiten eingeschrieben sind.«

48. Einer beliebigen Geraden auf Q ist eine Developpable 3. Klasse zugeordnet, welche die Fläche S^3 umhüllt. Die einer Quergeraden $q_{\varkappa\lambda,\mu\nu}$ entsprechende abwickelbare Fläche

zerfällt in die Ebenenbüschel der Kanten $a_{\varkappa\lambda}$, $a_{\mu\nu}$, der Rest ist also ebenfalls ein Ebenenbüschel, dessen Axe die Punkte $r_{\varkappa\lambda}$, $r_{\mu\nu}$ der beiden Kanten verbindet, wobei $r_{\varkappa\lambda}$ von $q_{\varkappa\lambda} = (a_{\varkappa\lambda}, q_{\varkappa\lambda,\mu\nu})$ harmonisch getrennt wird durch $a_\varkappa$, a_λ. Diese 3 Geraden $r_{\varkappa\lambda}\, r_{\mu\nu} = r_{\varkappa\lambda,\mu\nu}$ schneiden sich in q. Also: »Auf S^3 liegen 3 Geraden, welche je 2 Gegenkanten verbinden und sich im harmonischen Centrum der Quergeradenebene schneiden.«

Wir haben bereits oben (47.) gesehen, dass den Geraden $q_\varkappa$ die Berührungskegelschnitte der Flächen $A_\varkappa$ entsprechen; der letzte Satz setzt uns in den Stand, auch die Berührungspunkte anzugeben. Denn der Kegelschnitt in $A_\varkappa$ berührt z. B. $a_{\lambda\mu}$ in dem Punkte, welcher dem Punkte $q_{\lambda\mu}$ auf $q_\varkappa$ entspricht. Da nun dem Punkte $q_{\lambda\mu}$, weil er $a_{\lambda\mu}$ angehört, jeder Punkt dieser Kante, und weil er $q_{\lambda\mu,\varkappa\nu}$ angehört, ein Punkt von $r_{\lambda\mu,\varkappa\nu}$ entspricht, so ist der Berührungspunkt kein anderer als $r_{\lambda\mu}$. Dies giebt, da dasselbe von dem Kegelschnitt der Ebene A_ν gilt, den Satz:

»Die Berührungskegelschnitte zweier Tetraederflächen A_μ, A_ν berühren die gemeinsame Kante $a_{\varkappa\lambda}$ in demselben Punkte $r_{\varkappa\lambda}$.«

49. Ein näheres Eingehen auf die Fläche 3. Klasse gestattet der Zweck der vorliegenden Arbeit nicht. Ich begnüge mich daher damit, darauf hingewiesen zu haben, in wie einfacher Weise sich die Haupteigenschaften dieser Fläche auf dem eingeschlagenen Wege ableiten lassen. Um noch erkennen zu lassen, dass die Reciproke der Fläche F^3 keine andere ist, als die unter dem Namen der Steiner'schen Fläche 4. Ordnung bekannte, leite ich vermittelst des Gesetzes der Dualität aus früheren Sätzen über die Fläche F^3 die entsprechenden für S^3 ab. So ergiebt sich z. B. aus (16.), dass die Fläche S^3 von der 4. Ordnung ist, aus (16.), dass die 3 Geraden $r_{\varkappa\lambda,\mu\nu}$ Doppelgeraden, die 6 Punkte $r_{\varkappa\lambda}$ uniplanare Doppelpunkte und q ein dreifacher Punkt von S^3 ist; aus (18.), dass die Tangentialebenenschnitte in 2 Kegelschnitte zerfallen, etc. Diese letzte Eigenschaft ist die, welche den grossen Geometer zur Entdeckung der Fläche

geführt und den ersten Arbeiten[1]) über sie zum Ausgangspunkt gedient hat.

Es sei noch bemerkt, dass obige Construction zugleich eine Abbildung der Steiner'schen Fläche auf der Ebene Q giebt. Die Berührungskegelschnitte werden durch die 4 Geraden abgebildet, in denen Q von den Flächen des Tetraeders geschnitten wird; die Ecken des Vierseits sind die Abbilder der uniplanaren Punkte, während die 3 Doppelgeraden durch die Diagonalen und der dreifache Punkt durch die 3 Schnittpunkte der Diagonalen abgebildet werden.

Ich will diese Betrachtungen nicht schliessen, ohne noch einer Consruction der Steiner'schen Fläche Erwähnung gethan zu haben, welche sich aus (5.) als eine auf dem Princip der Reciprocität beruhende Consequenz ergiebt. Es seien $E_\varkappa$ ($\varkappa = 1, 2, 3\ 4$) 4 Ebenen, die sich in a schneiden, und $e_\varkappa$ vier beliebige Punkte im Raume; es sei X eine beliebige Ebene, welche die Ebenen $E_\varkappa$ in den Geraden $e_\varkappa$ schneidet. Diejenigen Ebenen X, welche die Bedingung erfüllen, dass die 4 Ebenen $(e_\varkappa\ e_\varkappa)$ in einem Punkte sich schneiden, umhüllen eine Steiner'sche Fläche.

III.

§ 1. Der Ebenenort.

50. Die zweite im Eingange gestellte Frage, deren Behandlung mir jetzt obliegt, fixire ich folgendermassen. Welchen Ort umhüllt eine Ebene Π, welche die Flächen $A_\varkappa$ des Tetraeders so schneidet, dass die 4 Verbindungsebenen der Schnittlinien $(A_\varkappa, \Pi)$ mit $a_\varkappa^\infty$ durch denselben Punkt gehen?

Um die Klasse der Fläche zu bestimmen, untersuche ich, wieviel Tangentialebenen durch eine beliebige Gerade l an sie gehen. Es sei X eine willkürliche Ebene durch l,

[1]) Kummer, Weierstrass, Schröter (Berliner Monatsberichte 1863, auch Crelle's Journal Bd. 64); Cremona, Crelle's Journal Bd. 63; Cayley, ibid. Bd. 64 etc.

die Schnittlinien $(X, A_\varkappa)$ mögen durch $x_\varkappa$, die Schnittpunkte $(A_\varkappa, 1)$ durch $g_\varkappa$, die Verbindungsebenen $(x a_\varkappa^\infty)$ durch $X_\varkappa$ und die Verbindungslinien $g_\varkappa a_\varkappa^\infty$ durch $b_\varkappa$ bezeichnet werden. Dreht sie X um 1, so entstehen 4 Ebenenbüschel $b_\varkappa(X_\varkappa)$, welche projectivisch sind, da sie mit dem Ebenenbüschel 1(X) einzeln perspectivisch liegen. Nun erzeugt das Ebenenbüschel $b_1(X_1)$ mit den 3 andern 3 Hyperboloide $H^2_{12}, H^2_{13}, H^2_{14}$ deren Entstehungsart aus der Bezeichnungsweise erhellt; diese haben die Erzeugende b_1 gemein, schneiden sich also noch in 4 Punkten (vergl. 3), denen ebensoviel Tangentialebenen durch 1 an die gesuchte Fläche entsprechen. Damit ist erwiesen:

»Die Ebene II umhüllt eine Fläche vierter Klasse Φ^4.«

Rückt insbesondere die Gerade 1 ins Unendliche, so haben die 4 projectivischen Ebenenbüschel $b_\varkappa(X_\varkappa)$ die unendlich ferne Ebene E_∞ entsprechend gemein; die drei Hyperboloide zerfallen daher in drei Ebenenpaare, so zwar, dass die unendlich ferne Ebene einen Bestandtheil jedes Paares bildet, während die zweiten Ebenen im Allgemeinen von E_∞ verschieden sind, also sich in einem Punkte schneiden, welchem eine von E_∞ verschiedene Tangentialebene durch 1 entspricht. Es giebt also von jeder Geraden im Unendlichen nur eine endliche Tangentialebene, woraus zu schliessen ist, dass die unendlich ferne Ebene dreifach zu zählen ist. Also:

»Die Enveloppe Φ^4 hat die unendlich ferne Ebene zur dreifachen Tangentialebene.«

Ausser der unendlich fernen Ebene besitzt die Fläche Φ^4 keine mehrfache Tangentialebene; denn sonst müsste es vorkommen, dass mehrere Punkte ein und dieselbe Fusspunktsebene hätten; es ist aber leicht zu sehen, dass eine solche Annahme ad absurdum führt.

51. Schon bei Gelegenheit der Untersuchung des Punktortes sind einige Bemerkungen gefallen, die den Ebenenort betreffen. So hatten sich 4 Punkte $a'_\varkappa$ als auf der Fläche 3. Ordnung liegend herausgestellt, deren Fusspunktsebenen die Tetraederflächen $A_\varkappa$ sind; letztere werden also von der Fläche Φ^4 berührt. Die Verification dieses Ergebnisses führt

zugleich auf die Construction der Berührungspunkte. In der That, ist l eine beliebige Gerade auf A_1, g_λ ($\lambda = 2, 3, 4$) die Schnittpunkte (A_λ, l), X eine Ebene durch l und verbindet man die 3 Schnittlinien (X, A_λ) mit a_λ^∞ durch Ebenen, so beschreiben letztere um die 3 Geraden $g_\lambda a_\lambda^\infty$ drei projectivische Ebenenbüschel, welche also eine Raumcurve 3. Ordnung erzeugen; diese schneidet die Ebene $(l a_1^\infty)$ in 3 Punkten. Wenn aber die Gerade l den Fusspunkt b'_1 der von a'_1 auf A_1 gefällten Senkrechten enthält, so liegt a'_1 auch in der Ebene $(l a_1^\infty)$ und ist einer der 3 Schnittpunkte dieser Ebene mit der Raumcurve; von allen Geraden l durch b'_1 giebt es also nur 2 Tangentialebenen ausser A_1, d. h. b'_1 ist der Berührungspunkt. Also:

»Die Tetraederflächen $A_\varkappa$ werden von der Fläche Φ^4 berührt und zwar in den Punkten, die senkrecht unter $a'_\varkappa$ liegen.«

52. Es ist schon früher erwähnt worden, dass die Fusspunktsebene einer Ecke $a_\varkappa$ des Tetraeders unbestimmt wird; jede Ebene durch die Höhe $h_\varkappa$ kann als solche gelten, also als Tangentialebene an Φ^4, woraus wir schliessen, dass die Höhen der Fläche Φ^4 angehören.

Eine einfache Ueberlegung lehrt ferner, dass die Fusspunktsebene eines beliebigen Punktes einer Kante durch ihn selbst geht und zur Gegenkante senkrecht steht; alle auf einer Kante $a_{\varkappa\lambda}$ senkrechten Ebenen enthalten aber die Punkte $a_\mu^\infty, a_\nu^\infty$, also deren Verbindungslinie $a_\mu^\infty a_\nu^\infty = n_{\mu\nu}^\infty$, letztere liegt deshalb auf Φ^4. Also: »Die Höhen des Tetraeders und die 6 Verbindungslinien $n_{\varkappa\lambda}^\infty$ ihrer unendlich fernen Punkte gehören der Fläche Φ^4 an.«

Von Interesse ist es zu erfahren, welches Gebilde von den Fusspunktsebenen der Punkte einer Quergeraden umhüllt wird. Es sei $\mathfrak{x}$ ein Punkt der Quergeraden $q_{\varkappa\lambda,\mu\nu}$, $\mathfrak{x}_\rho$ die senkrechte Projection von $\mathfrak{x}$ und $q^{(\rho)}$ die von $q_{\varkappa\lambda,\mu\nu}$ auf die Tetraederfläche A_ρ ($\rho = 1, 2, 3, 4$). Die Punkte $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{x}_2$ beschreiben auf $q^{(1)}$ resp. $q^{(2)}$ perspectivische Punktreihen, die Projectionsstrahlen $\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2$ gehen also durch einen festen Punkt. Dasselbe gilt von den Geraden $\mathfrak{x}_3\mathfrak{x}_4$. Da nun die 4 Punkte $\mathfrak{x}_\rho$ in

einer Ebene liegen, also $\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2$ und $\mathfrak{x}_3\mathfrak{x}_4$ sich schneiden, so müssen die Mittelpunkte der beiden Strahlbüschel, die von $\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2$ resp. $\mathfrak{x}_3\mathfrak{x}_4$ beschrieben werden, identisch sein. Das Erzeugniss ist daher ein Kegel 2. Klasse. Die Spitze desselben ruht im Unendlichen, da er durch Parallelstrahlenbüschel erzeugt ist, und zwar im Punkte $(n^{\infty}_{\varkappa\lambda}, n^{\infty}_{\mu\nu}) = n^{\infty}_{\varkappa\lambda,\mu\nu}$, da die den Schnittpunkten von $q_{\varkappa\lambda,\mu\nu}$ mit den Kanten zugehörigen Fusspunktsebenen diesen Punkt gemein haben. Der Cylinder wird überdies von E_∞ tangirt, denn durch jede Gerade von E_∞ geht nur noch eine Tangentialebene an Φ^4. Also:

»Die den Quergeraden zugehörigen Fusspunktsebenen umhüllen parabolische Cylinder 2. Klasse, deren Scheitel die Diagonalpunkte des Vierecks $a^{\infty}_1 a^{\infty}_2 a^{\infty}_3 a^{\infty}_4$ sind.«

53. Die Resultate der vorigen Nr. ergeben sich weit einfacher und unmittelbarer mit Rücksicht auf die Beziehung, welche zwischen der Fläche Φ^4 und der Fläche 3. Ordnung F^3 besteht. Zuvor mögen an dieser Stelle noch einige Erzeugungsweisen der Fläche Φ^4 Platz finden. Aus den Sätzen in Nr. 35 ergiebt sich, dass die Fläche F^3 der Ort der Brennpunkte π aller Rotationsparaboloide ist, die dem Tetraeder eingeschrieben sind, während die Fusspunktsebenen Π die Scheiteltangentialebenen sind. Da alle diese Flächen ein Gewebe (d. h. eine Schaar von doppelter Unendlichkeit) bilden, so können wir sagen:

»Die Scheiteltangentialebenen eines Gewebes von Rotationsparaboloiden umhüllen eine Fläche 4. Klasse mit einer dreifachen Tangentialebene im Unendlichen.«

Das Gewebe lässt sich auf die Geraden der unendlich fernen Ebene so beziehen, dass man jedem Individuum die Polare seines Berührungspunktes in Bezug auf den imaginären Kreis zuordnet. Die Tangentialebene, die von jeder unendlich fernen Geraden an die ihr zugeordnete Fläche gelegt wird, ist offenbar mit der Scheiteltangentialebene identisch. Diese Wahrnehmung berechtigt zu dem Ausspruche des allgemeinen Satzes:

»Werden die Flächen eines Gewebes von Rotationsflächen 2. Grades auf die Geraden einer allen gemeinsamen

Tangentialebene T projectivisch bezogen, so ist die Enveloppe der Tangentialebenen, die von den Geraden an die entsprechenden Flächen gehen, eine Fläche 4. Klasse, welche die Ebene T zur dreifachen Tangentialebene hat.«

Noch eine andere Erzeugungsart der Fläche Φ^4 ist leicht zu finden. Es sei s eine auf einer Fläche des Doppelpunkttetraeders von F^3 senkrecht stehende Gerade, π_1, π_2, π_3 ihre Schnittpunkte mit F^3 und p_1^∞, p_2^∞, p_3^∞ deren Abbilder. Die letzten 3 Punkte können nicht in einer Geraden liegen, denn dieser würde auf F^3 eine Raumcurve 3. Ordnung entsprechen, welche mit s drei Punkte gemein hätte, also zerfallen müsste, was im Allgemeinen nicht geschieht. Den Punkten p_ρ^∞ ($\rho = 1, 2, 3$) sind in Bezug auf den imaginären Kreis im Unendlichen 3 Geraden p_ρ^∞ zugeordnet, ihre Polaren, welche ein Dreiseit bilden. Ist nun p der Fusspunkt von s in der Tetraederfläche A_χ, so sind die Verbindungsebenen (pp_ρ^∞) offenbar die den Punkten π_ρ zugehörigen Fusspunktsebenen. Bewegt sich nun p auf A_χ, so constituiren die Geraden p_ρ^∞ ein dreifaches Geradenfeld auf E_∞. Daher der Satz:

»Die Fläche Φ^4 wird umhüllt von den Verbindungsebenen der entprechenden Elemente zweier reciproker Gebilde, von denen das eine ein einfaches Punktenfeld, das andere ein dreifaches Geradenfeld ist; der Träger des letzteren ist die unendlich ferne Ebene.«

§ 2. Zusammenhang des Punktorts und des Ebenenorts. Eigenschaften des letzteren.

54. Durch den imaginären Kreis im Unendlichen wird zwischen dem Punktort und dem Ebenenort eine Beziehung hergestellt derart, dass die Eigenschaften der einen Fläche mit denen der andern in einem einfachen Zusammenhange stehen. Auf diese Weise wird unter Zuziehung der früher für die Fläche dritter Ordnung erhaltenen Resultate die Ableitung einer Reihe von Eigenschaften der Fläche Φ^4 ermöglicht, welche sich sonst vielleicht nicht so leicht ergeben würden.

Von jeder Geraden p^∞ der unendlich fernen Ebene lässt sich nur eine Tangentialebene Π an Φ^4 legen; der ihr entsprechende Punkt π auf F^3 wird durch die normale Richtung p^∞ der Ebene Π abgebildet, sodass p^∞ und p^∞ ein rechtwinkliges Polarsystem auf E_∞ bilden, dessen Directrix der imaginäre Kreis ist. Auf Grund dieser polaren Beziehung wird ein tieferer Einblick ermöglicht sowohl in den Zusammenhang, der die beiden Flächen an einander knüpft, als auch in besondere Eigenschaften, durch welche der Ebenenort ausgezeichnet ist.

Für die Abbildung der Fläche F^3 war vorzugsweise das Vierseit charakteristisch, welches die Doppelpunkte der Fläche abbildet, d. h. das Vierseit der Hauptgeraden $a^\infty_\varkappa$. Diesem entspricht im Polarsystem das Viereck der Punkte $\alpha^\infty_\varkappa$, während den Ecken $\alpha^\infty_{\varkappa\lambda}$ und Diagonalen $q^\infty_{\varkappa\lambda,\mu\nu}$ des Vierseits die Seiten $u^\infty_{\varkappa\lambda}$ resp. Diagonalpunkte $u^\infty_{\varkappa\lambda,\mu\nu}$ des Vierecks zugeordnet sind.

55. Jeder Geraden p^∞ entspricht durch Vermittelung der Abbildung ein Punkt π auf F^3 und umgekehrt. Auch den Punkten des unendlich fernen Schnitts C^3 von F^3 entsprechen Gerade p^∞, aber durch diese gehen keine Tangentialebenen an Φ^4 ausser E_∞ selbst, sie umhüllen also die Berührungscurve. Da nun das Abbild des Schnitts C^3 sich mit C^3 selbst deckt, so haben wir das bemerkenswerthe Resultat:

»Der unendlich ferne Schnitt C^3 der Fläche F^3 und die Berührungscurve der dreifachen Tangentialebene der Fläche Φ^4 sind reciproke Polaren in Bezug auf den imaginären Kreis.«

Die Eigenschaften der Curve C^3 übertragen sich daher nach dem Dualitätsgesetz auf die Berührungscurve. Wir wissen bereits, dass C^3 eine allgemeine Curve 3. Ordnung ist (44.) und durch die Hauptpunkte geht; folglich:

»Die Berührungscurve der dreifachen Tangentialebene ist eine Curve 3. Klasse und 6. Ordnung Γ^3; sie berührt die 6 Geraden $u^\infty_{\varkappa\lambda}$.«

56. Durchläuft π eine Kante $a_{\varkappa\lambda}$ des Tetraeders, so bleibt p^∞ unverändert der Hauptpunkt $\alpha^\infty_{\varkappa\lambda}$, also geht Π stets durch

$n^{\infty}_{\varkappa\lambda}$; diese Gerade liegt daher auf Φ^4. Beschränken wir π auf eine Quergerade, so bewegt sich p^{∞} auf $q^{\infty}_{\varkappa\lambda,\mu\nu}$, folglich geht Π stets durch $n_{\varkappa\lambda,\mu\nu}$; der Tangentialcylinder von diesem, wie von jedem Punkte, ist 4. Klasse, zerfällt aber hier in die Ebenenbüschel, deren Axen $n^{\infty}_{\varkappa\lambda}$ und $n^{\infty}_{\mu\nu}$ sind, sodass nur ein Cylinder 2. Klasse übrig bleibt. Wir sehen hieraus, wie auf diesem Wege die obigen Resultate (52.) sich sehr einfach ergeben.

Einer beliebigen Geraden auf E_{∞} entspricht eine Raumcurve 3. Ordnung auf F^3 und ein Strahlbüschel im Polarsystem, d. h. die entsprechenden Fusspunktsebenen umhüllen einen Cylinder 4. Klasse, welcher, da von seinem Scheitel 3 Tangenten an Γ^3 gehen, E_{∞} dreifach berührt; seine Ordnungszahl reducirt sich daher auf 6. — Enthält die Gerade einen Hauptpunkt $a^{\infty}_{\varkappa\lambda}$, so zerfällt die Raumcurve in eine Kante und einen Kegelschnitt, der Cylinder aber in das Ebenenbüschel um $n^{\infty}_{\varkappa\lambda}$ und einen Cylinder 3. Klasse, welcher E_{∞} doppelt berührt und daher 4. Ordnung ist. Also; »Einer Raumcurve 3. Ordnung auf F^3 entspricht ein Φ^4 umhüllender Cylinder 4. Klasse und 6. Ordnung, einem durch 2 Ecken des Tetraeders gehenden Kegelschnitt auf F^3 ein Cylinder 3. Klasse und 4. Ordnung.«

Einem beliebigen ebenen Schnitt S^3 von F^3 entspricht eine Φ^4 umhüllende Developpable, welche E_{∞} dreifach berührt; denn das Abbild S^3_1 von S^3 hat mit C^3 ausser den Hauptpunkten 3 Punkte gemein, also hat die der S^3_1 im Polarsystem entsprechende Curve Σ^3 3. Klasse und 6. Ordnung mit Γ^3 ausser den Geraden $n^{\infty}_{\varkappa\lambda}$ noch 3 gemeinsame Tangenten, welche die Berührungsstrahlen der Developpablen bilden. Da nun der Schnitt von E_{∞} mit der abwickelbaren Fläche aus den 3 doppelt zu zählenden Berührungsstrahlen und der Curve Σ^3 besteht, so ist die Ordnung der Fläche gleich 12. Von jedem Punkte der E_{∞} gehen an die Fläche ausser E_{∞} noch 3 Tangentialebenen, da an Σ^3 drei Tangenten gehen, folglich ist die Fläche 6. Klasse. Also:

»Die einem ebenen Schnitt von F^3 entsprechende abwickelbare Fläche ist eine Fläche 6. Klasse und 12. Ordnung.«

Auf dieselbe Weise überzeugt man sich von der Richtigkeit des Satzes: »Einem Kegelschnitt auf F^3, dessen Ebene durch eine Quergerade geht, entspricht eine Developpable 4. Klasse und 6. Ordnung.«

57. Ich gehe zur Bestimmung der Ordnung des Ebenenortes über und werde zeigen, dass seine Ordnungszahl, weil er eine dreifache und sonst keine vielfache Tangentialebene (50.) besitzt, 24 ist. Diesen Nachweis liefere ich durch den Beweis des reciproken Satzes. Es sei also Fläche F^4 eine Fläche 4. Ordnung mit einem dreifachen Punkte und l eine beliebige Gerade. Die sämmtlichen Tangentialebenen durch l an F^4 haben ihre Berührungspunkte auf der Polarcurve von l[1]), d. h. auf der Schnittcurve des Büschels erster Polarflächen, die den Punkten von l entsprechen, also auf einer Curve 9. Ordnung, welche durch 2 Polarflächen bestimmt ist. Der dreifache Punkt von F^4 ist aber für jede erste Polarfläche ein Doppelpunkt, gilt daher für $2.2.3. = 12$ Durchschnittspunkte von F^3 mit der Polarcurve, sodass nur noch 24 Schnittpunkte übrig bleiben. Diese mit l verbunden sind die Tangentialebenen durch l, also ist F^4 von der 24. Klasse. Daher reciprok:

»Der Ebenenort Φ^4 ist eine Fläche 4. Klasse und 24. Ordnung mit einer dreifachen Tangentialebene.«

58. Eine Bestätigung erfährt dieses Resultat durch die Untersuchung des unendlich fernen Schnittes von Φ^4. Es ist zunächst klar, dass die 6 auf Φ^4 gelegenen Geraden $n^{\infty}_{\varkappa\lambda}$ nicht Doppelgeraden der Fläche sind; denn sonst bekämen die Cylinder 3. Klasse, die von den Punkten dieser Geraden an Φ^4 gehen, ausser E_∞ noch eine Bitangentialebene, müssten also zerfallen, was aber im Allgemeinen nicht geschieht (57.). Die 6 Geraden bilden also mit der Berührungscurve 6. Ordnung Γ^3, die für den Schnitt doppelt zu zählen ist, eine Curve 18. Ordnung. Was den noch übrigen Schnitt betrifft, so lässt sich ersehen, dass er aus Geraden bestehen muss; denn die Klasse des Totalschnitts ist 6, weil die Tangential-

[1]) Cremona, Preliminari di una theoria delle superficie. No. 66.

cylinder 6. Ordnung sind (57.); da nun die Curve Γ^3 schon für eine Curve $2.3 = 6$. Klasse zählt, so kann der übrige Schnitt nur in Geraden zerfallen, die auf die Klasse keinen Einfluss haben.

Während im Endlichen kein Punkt vorkommen kann von der Beschaffenheit, dass die Fusspunkte der von ihm auf die Tetraederflächen gefällten Senkrechten in einer Geraden liegen oder die Verbindungslinien des Punktes mit $a_\varkappa^\infty$ die Ebenen $A_\varkappa$ in 4 Punkten einer Geraden treffen, weil sonst die Verbindungsebene des Punktes mit der Geraden auf allen Tetraederflächen senkrecht stehen müsste, so ist im Unendlichen die Möglichkeit dieses Falles nicht ausgeschlossen. Jede Ebene durch eine solche Gerade würde Tangentialebene an Φ^4 sein, die Gerade müsste daher auf Φ^4 liegen. Um nun die factische Existenz solcher Geraden und ihre Beziehungen nachzuweisen, schicke ich eine Voruntersuchung voraus.

59. Es seien 3 beliebige Geraden $g_\varkappa$ und 3 beliebige Punkte $\mathfrak{g}_\varkappa$ ($\varkappa = 1, 2, 3$) gegeben; die Schnittpunkte $(g_\varkappa, g_\lambda)$ seien durch $\mathfrak{g}_{\varkappa\lambda}$, die Verbindungslinien $\mathfrak{g}_\varkappa \mathfrak{g}_\lambda$ durch $g_{\varkappa\lambda}$ bezeichnet $\binom{\varkappa = 1, 2, 3}{\lambda = 1, 2, 3}$. Nach Grassmann [1]) ist der Ort eines Punktes $\mathfrak{x}$, dessen Verbindungslinien mit $\mathfrak{g}_\varkappa$ die Geraden $g_\varkappa$ in 3 Punkten einer Geraden x treffen, eine Curve 3. Ordnung, welche die 3 Punkte $\mathfrak{g}_{\varkappa\lambda}$ und die 3 Punkte $\mathfrak{g}_\varkappa$ enthält. Sind $g_\varkappa$ und $\mathfrak{g}_\varkappa$ Polare und Pol in Bezug auf einen Kegelschnitt, so ordnen sich die Punkte der Curve in Paare, so zwar, dass, wenn $\mathfrak{x}$ ein Punkt der Curve ist und x die zugehörige Gerade, der Pol $\mathfrak{x}'$ von x auch auf der Curve liegt, während seine zugehörige Gerade x' die Polare von $\mathfrak{x}$ ist. In der That sind die Polaren der Punkte $(x, g_\varkappa) = \mathfrak{x}_\varkappa$ die Geraden $\mathfrak{x}'\mathfrak{g}_\varkappa$, gehen also durch $\mathfrak{x}'$, folglich müssen die Schnittpunkte $(\mathfrak{x}'\mathfrak{g}_\varkappa, g_\varkappa)$, d. h. die Pole der Geraden $\mathfrak{x}_\varkappa \mathfrak{g}_\varkappa$, welche durch $\mathfrak{x}$ gehen, auf der Polare x' von $\mathfrak{x}$ liegen. In dieser

[1]) Grassmann, Crelle's Journal Bd. 31, 36, 51. Auch Clebsch Math. Annalen Bd. V, p. 422.

Weise sind z. B. g_{12} und (g_3, g_{12}), ebenso g_{23} und (g_1, g_{23}) zugehörige Punktpaare. Verbindet man g_{12} mit (g_1, g_{23}) und g_{23} mit (g_3, g_{12}), so schneiden sich die beiden Verbindungslinien in g_{13}, d. h. auf der Curve. Hieraus ist zu erkennen, dass die paarweise Zuordnung mit dem Conjugirtsein im Hesse'schen Sinne identisch ist.

Nehmen wir noch eine vierte Gerade g_4 und ihren Pol g_4 hinzu, so erhalten wir, da dieses Elementenpaar mit je 2 der obigen combinirt werden kann, noch 3 Curven 3. Ordnung. Bezeichnen wir die durch die 3 Geraden $g_\varkappa$, g_λ, g_μ und die 3 Punkte $g_\varkappa$, g_λ, g_μ gelieferte Curve durch C_ν^3, so ist klar, dass 2 Curven, etwa C_1^3 und C_2^3, die offenbar die Punkte g_{34}, g_3, g_4 gemein haben, noch 6 Schnittpunkte p besitzen, deren jeder die Eigenschaft besitzt, dass seine Verbindungslinien mit $g_\varkappa$ die Geraden $g_\varkappa$ in 4 Punkten einer Geraden treffen. Eben wegen dieser Eigenschaft aber müssen offenbar die 6 Punkte nothwendig auch auf C_3^3 und C_4^3 liegen. Die 4 Curven $C_\varkappa^3$ schneiden sich also in 6 Punkten, ausserdem haben je zwei $C_\varkappa^3$ und C_λ^3 die 3 Punkte $g_{\varkappa\lambda}$, $g_\varkappa$, g_λ gemein. Es bedarf nach dem Obigen keiner besonderen Auseinandersetzung, dass die 6 Punkte in 3 Paare sich theilen und dass diese 3 Paare für jede der 4 Curven conjugirte Punktpaare sind; da nun 3 beliebige conjugirte Punktpaare eine Curve 3. Ordnung eindeutig bestimmen, so müssen unsre 3 Paare von einander abhängig sein, also die Ecken eines vollständigen Vierseits bilden (vergl. 10. Anmerkung).

60. Mit Anwendung der gewonnenen Resultate auf die 4 Geraden $a_\varkappa^\infty$ und die 4 Punkte $a_\varkappa^\infty$, welche in der Beziehung von Pol und Polare stehen hinsichtlich des imaginären Kreises, giebt es ein Vierseit $p_\varkappa^\infty$, dessen Ecken $p_{\varkappa\lambda}^\infty = (p_\varkappa^\infty, p_\lambda^\infty)$ von der Beschaffenheit sind, dass jede, mit $a_\varkappa^\infty$ verbunden, 4 Gerade liefert, deren Schnittpunkte mit $a_\varkappa^\infty$ in einer Geraden $p_{\varkappa\lambda}^\infty$ liegen; diese 6 Geraden bilden ein Viereck, dessen Ecken $p_\varkappa$ seien, derart das $p_{\varkappa\lambda}^\infty = p_\varkappa^\infty p_\lambda^\infty$ ist.

Durch $p_{\varkappa\lambda}^\infty$ gehen die dem Punkte $p_{\varkappa\lambda}^\infty$ entsprechenden Tangentialebenen, während $p_{\mu\nu}^\infty$ der Pol von $p_{\varkappa\lambda}^\infty$, also das Abbild von $p_{\varkappa\lambda}^\infty$ ist; da diese Eigenschaft, die die Punkte $p_{\varkappa\lambda}^\infty$

zeigen, nur den Punkten des unendlich fernen Schnitts C^3 von F^3 zukommt, so ziehen wir daraus den Schluss, dass die 6 Punkte $p^{\infty}_{\varkappa\lambda}$ auf C^3 liegen und zwar 3 conjugirte Punktpaare dieser Curve bilden. Die Geraden $p^{\infty}_{\varkappa\lambda}$ berühren daher Γ^3 und sind paarweis conjugirt.

Dasselbe, was von $p^{\infty}_{\varkappa\lambda}$ eben bewiesen worden, ist schon oben von den 6 Geraden $n^{\infty}_{\varkappa\lambda}$ gesagt worden. Mit Benutzung des Satzes, dass, wenn die Gegenseitenpaare von 2 vollständigen Vierecken conjugirte Tangenten einer Curve 3. Klasse sind, die 8 Ecken auf einem Kegelschnitt liegen, ergiebt sich daher folgendes Resultat:

»Die Fläche Φ^4 besitzt im Unendlichen 12 Gerade, welche die Seiten zweier demselben Kegelschnitt einbeschriebenen Vierecke bilden und die Curve Γ^3 berühren.«

Damit ist zugleich die Frage nach dem unendlich fernen Schnitt von Φ^4 erledigt.

61. Die unendlich fernen Theile der Fläche Φ^4 beanspruchen noch weiteres Interesse. In jedem der 8 Punkte $a^{\infty}_{\varkappa}$ und $p^{\infty}_{\varkappa}$ treffen 3 Geraden des unendlich fernen Schnitts zusammen, während in den 6 Diagonalpunkten $n_{\varkappa\lambda,\mu\nu}$ und $p_{\varkappa\lambda,\mu\nu}$ der beiden Vierecke sich je 2 Geraden schneiden. Da weder jene 8 Punkte, noch diese 6 auf der Berührungscurve Γ^3 liegen, so können wir mit Hülfe des Kummer'schen Satzes (vergl. 16.) und einer leicht zu erkennenden Erweiterung desselben schliessen, dass die 8 Punkte dreifache, die 6 andern Doppelpunkte von Φ^4 sind. Mit Rücksicht auf die Lage dieser Punkte können wir daher sagen:

»Die Fläche Φ^4 besitzt im Unendlichen 8 dreifache Punkte, die auf einen Kegelschnitt liegen, und 6 Doppelpunkte, welche 2 conjugirte Tripel dieses Kegelschnitts bilden.«

62. Der Tangentialcylinder 4. Klasse, der von $p_{\varkappa}$ an Φ^4 geht, zerfällt in die Ebenenbüschel um die 3 unendlich fernen Geraden der Fläche Φ^4, die sich in $p_{\varkappa}$ schneiden, also noch in ein 4. Ebenenbüschel, dessen Axe $g_{\varkappa}$ also auf Φ^4 gelegen ist und zwar offenbar im Endlichen, da der Totalschnitt von E_{∞} bereits bestimmt ist. Die Lage der

4 Geraden $g_\varkappa$ bestimmt sich durch die Bemerkung, dass dem Ebenenbüschel $g_\varkappa(X)$ die Raumcurve 3. Ordnung auf F^3 entspricht, welche durch $p_\varkappa^\infty$ abgebildet wird. Da nun jede Raumcurve 3. Ordnung auf F^3 durch die Ecken des Tetraeders geht und letzteren die Ebenenbüschel der Höhen $h_\varkappa$ entsprechen, so muss das Ebenenbüschel $g_\varkappa(X)$ mit jedem Ebenenbüschel $h_\varkappa(X)$ eine Ebene gemein haben, also $g_\varkappa$ muss die 4 Höhen schneiden. Die Höhen liegen bekanntlich auf einem Hyperboloid; auf diesem sind daher auch die 4 Geraden $g_\varkappa$ gelegen; die letzteren gehören zu der einen, die Höhen zu der andern Schaar Erzeugender der Regelfläche.

Der Tangentialkegel 4. Klasse, der von einem beliebigen Punkte $\mathfrak{x}$ der Geraden $g_\varkappa$ an Φ^4 geht, zerfällt in das Ebenenbüschel $g_\varkappa(X)$ und einen Kegel 3. Klasse; beide haben 3 Ebenen gemein, nämlich die 3 Ebenen $(g_\varkappa p_{\varkappa\lambda})$, $(g_\varkappa p_{\varkappa\mu})$, $(g_\varkappa p_{\varkappa\nu})$, diese sind also für den Kegel 4. Klasse Bitangentialebenen, und da sie nicht Bitangentialebenen von Φ^4 sind, müssen sie die Berührungsebenen in $\mathfrak{x}$ sein (nach dem reciproken Satz des Kummer'schen), d. h. $\mathfrak{x}$ ist ein Triplanarpunkt von Φ^4. Da $\mathfrak{x}$ beliebig war, so sind $g_\varkappa$ dreifache Gerade von Φ^4. Dasselbe gilt von $h_\varkappa$. Also:

»Die Fläche Φ^4 besitzt 8 dreifache Gerade im Endlichen, welche auf dem Höhenhyperboloid liegen; 4 davon sind die Höhen, die andern gehören zur zweiten Schaar Erzeugender.«

Hieraus erkennt man, dass der Kegelschnitt, auf dem die 8 dreifachen Punkte liegen, der unendlich ferne Schnitt des Höhenhyperboloids ist.

63. Ich füge noch einige Bemerkungen über die Tangentialeigenschaften von Φ^4 hinzu.

Zwischen den Tangentialebenen besteht eine gewisse Zuordnung, sie bilden nämlich rechtwinklige Dreiflache; je 3 auf einander senkrechte Tangentialebenen schneiden E_∞ in einem conjugirten Dreiseit in Bezug auf den imaginären Kreis. Ferner überzeugt man sich leicht, dass alle Tangentialebenen, die zu einer gegebenen senkrecht stehen, einen Cylinder 4. Klasse und 6. Ordnung umhüllen.

Von einem beliebigen Punkte $\mathfrak{x}$ des Raumes geht ein Tangentialkegel 4. Klasse und 12. Ordnung an Φ^4. Liegt $\mathfrak{x}^\infty$ im Unendlichen, so reducirt sich die Ordnung auf 6. Jeder ebene Schnitt von Φ^4, der nach $\mathfrak{x}^\infty$ geht, hat daher 6 nach $\mathfrak{x}^\infty$ gerichtete Tangenten. Ist aber $\mathfrak{x}^\infty$ ein Punkt der Berührungscurve Γ^3, so hat jeder ebene Schnitt durch $\mathfrak{x}^\infty$ nur 5 nach $\mathfrak{x}^\infty$ gerichtete Tangenten; folglich ist der Tangentialcylinder von einem Punkte der Berührungscurve 4. Klasse und 5. Ordnung. Ebenso ist einzusehen, dass der Tangentialcylinder eines Rückkehrpunktes von Γ^3, deren diese Curve, da sie eine allgemeine Curve 3. Klasse ist, 9 besitzt, 4. Klasse und 4. Ordnung ist.

Lebenslauf.

Ich, Otto Handel, geboren am 1. October 1852 zu Markt-Borau, Kreis Strehlen, als der zweite Sohn des am 25. Dec. 1872 verstorbenen evang. Geistlichen Chr. O. Handel, wurde Ostern 1863 als Freischüler in die Königl. Waisen- und Schulanstalt zu Bunzlau aufgenommen und ging Michaeli 1868 auf das Gymnasium daselbst über, von welchem ich $4\frac{1}{2}$ Jahre später mit dem Zeugniss der Reife entlassen wurde. Ostern 1873 bezog ich die hiesige Königl. Universität und hörte die Vorlesungen der Herren Bachmann, Cohn, Dilthey, Dorn, Galle, Grube, Heidenhain, Krause, Löwig, Meyer, Römer, Rosanes, Schröter, Weber. Vier Semester war ich Mitglied des von den Herren Professoren Schröter und Meyer geleiteten mathematisch-physikalischen Seminars, nahm ein Semester an den mathematischen Uebungen des Herrn Prof. Rosanes theil und arbeitete ein Semester im physikalischen Institut unter Leitung der Herren Prof. Meyer und Dorn.

Am 22. März dieses Jahres wurde die von mir eingereichte Bearbeitung der von der philosophischen Facultät gestellten mathematischen Preisaufgabe des vollen Preises für würdig erklärt. Vorliegende Arbeit ist mit Ausschluss mehrerer ganz neu hinzugekommener Abschnitte (I, II § 4 und § 5) als eine durchgehends verkürzende Ueberarbeitung jener Bewerbungsschrift zu bezeichnen.

Allen oben genannten Herren, insbesondere den Herren Professoren Schröter, Meyer, Rosanes spreche ich an dieser Stelle für alle fördernde Anregung und Anleitung meinen aufrichtigsten Dank aus.

Thesen.

1. Eine Ausschliessung des Imaginären aus der synthetischen Geometrie ist nicht gerechtfertigt durch die Schwierigkeit, mit welcher die Einführung dieses Begriffes verknüpft ist.
2. Für räumliche synthetische Untersuchungen bietet eine zweckmässige Bezeichnungsweise das beste Hülfsmittel.
3. Die Trennung des Studiums der Mathematik und Physik von dem der beschreibenden Naturwissenschaften ist empfehlenswerth.
4. Die classischen Sprachen sind am geeignetsten, den Mittelpunkt des höheren Schulunterrichts zu bilden; in den oberen Klassen ist daneben der Mathematik und den Naturwissenschaften ein grösserer Einfluss, als bisher, einzuräumen.